This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

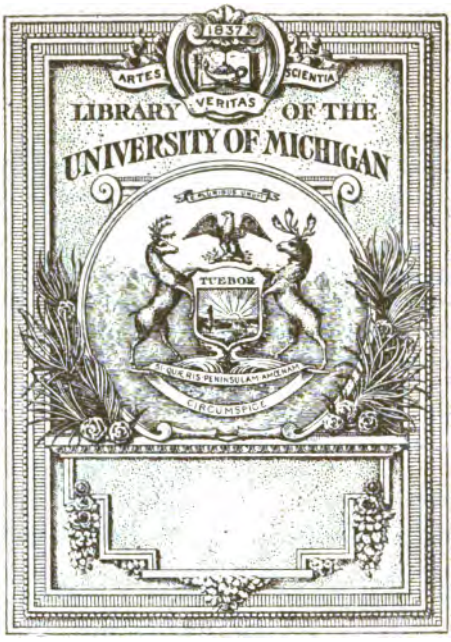
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

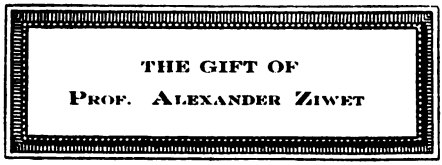
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.





Die Klassiker der exakten Wissenschaften sollen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie (einschliesslich Krystallkunde) und Physiologie enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Professor Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig); die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflan[illegible]. Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. D[illegible]

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Chemie und Krystallographie:

Nr. 3. **J. Dalton** u. **W. H. Wollaston,** Abhandlungen zur Atomtheorie. (1803—1808.) Herausgegeben v. W. Ostwald. Mit 1 Tafel. (30 S.) ℳ —.50.

» 4. **Gay-Lussac,** Über das Jod. (1814.) Herausgegeben v. W. Ostwald. (52 S.) ℳ —.80.

» 8. **A. Avogadro** u. **Ampère,** Abhandlungen zur Molekulartheorie. (1811 u. 1814.) Mit 3 Tafeln. Herausgegeben von W. Ostwald. (50 S.) ℳ 1.20.

» 9. **H. Hess,** Thermochemische Untersuchungen. (1839—1842.) Herausg. v. W. Ostwald. (102 S.) ℳ 1.60.

» 22. **Woehler u. Liebig,** Untersuchungen üb. d. Radikal d. Benzoesäure. (1832.) Herausg. von Herm. Kopp. Mit 1 Taf. (43 S.) ℳ 1.—.

» 26. **Justus Liebig,** Über die Constitution der organischen Säuren. (1838.) Herausgegeben von Herm. Kopp. (86 S.) ℳ 1.40.

» 27. **Robert Bunsen,** Untersuchungen über die Kakodylreihe. (1837—1843.) Herausgegeben von Adolf von Baeyer. Mit 3 Figuren im Text. (148 S.) ℳ 1.80.

» 28. **L. Pasteur,** Über die Asymmetrie bei natürlich vorkommenden organischen Verbindungen. (1860.) Übers. u. herausg. von M. u. A. Ladenburg. (36 S.) ℳ —.60.

» 29. **L. Wilhelmy,** Über das Gesetz, nach welchem die Einwirkung der Säuren auf den Rohrzucker stattfindet. (1850.) Herausgegeben von W. Ostwald. (47 S.) ℳ —.80.

» 30. **S. Cannizzaro,** Abriss e. Lehrganges der theoret. Chemie, vorgetr. an d. k. Universität Genua. (1858.) Übersetzt von Dr. Arthur Miolati aus Mantua. Herausgegeben von Lothar Meyer. (61 S.) ℳ 1.—.

» 34. **R. Bunsen** u. **H. E. Roscoe,** Photochemische Untersuchungen. (1855—1859.) Erste Hälfte. Herausgegeben v. W. Ostwald. Mit 13 Figuren im Text. (96 S.) ℳ 1.50.

» 35. **Jacob Berzelius,** Versuch, die bestimmten und einfachen Verhältnisse aufzufinden, nach welchen die Bestandtheile der unorgan. Natur mit einander verbunden sind. (1811—1812.) Herausgegeben von W. Ostwald. (218 S.) ℳ 3.—.

» 38. **R. Bunsen** und **H. E. Roscoe,** Photochemische Untersuchungen. (1855—1859.) Zweite Hälfte. Herausgegeben von W. Ostwald. Mit 18 Figuren im Text. (107 S.) ℳ 1.60.

» 42. **A. v. Humboldt** u. **J. F. Gay-Lussac,** Abhandlungen. üb. d. Volumgesetz gasförm. Verbindungen. Herausg. v. W. Ostwald. (42 S.) ℳ —.60.

» 45. **Humphry Davy,** Electrochemische Untersuchungen. Vorgelesen in der königl. Societät zu London als Bakerian Lecture am 20. November 1806 und am 19. November 1807. Herausgegeben von W. Ostwald. Mit 1 Tafel. (92 S.) ℳ 1.20.

» 58. **Carl Wilhelm Scheele,** Chemische Abhandlung von der Luft und dem Feuer. (1777.) Herausgegeben von W. Ostwald. Mit 5 Textfiguren. (112 S.) ℳ 1.80.

Nr. 66. **J. W. Doebereiner** und **Max Pettenkofer**, Abhandlungen über die Anfänge des natürlichen Systemes der chemischen Elemente, nebst einer geschichtlichen Übersicht der Weiterentwickelung der Lehre von den Triaden der Elemente. Herausgegeben von Lothar Meyer. (34 S.) ℳ —.60.

» 68. **Lothar Meyer** und **D. Mendelejeff**, Abhandlungen über das natürliche System der chemischen Elemente. (1864—1869 und 1869—1871.) Hrsgeg. v. Karl Seubert. Mit 1 Tafel. (134 S.) ℳ 2.40.

» 72. **G. Kirchhoff** und **R. Bunsen**, Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen. (1860.) Herausgegeben von W. Ostwald. Mit 2 Tafeln und 7 Figuren im Text. (74 S.) ℳ 1.40.

» 74. **Claude Louis Berthollet**, Untersuchungen über die Gesetze der Verwandtschaft. (1801.) Herausg. von W. Ostwald. (113 S.) ℳ 1.80.

» 75. **Axel Gadolin**, Abhandlung über die Herleitung aller krystallographischer Systeme mit ihren Unterabtheilungen aus einem einzigen Prinzipe. (Gelesen den 19. März 1867.) Deutsch herausgegeben von P. Groth. Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln. (92 S.) ℳ 1.50.

» 88. **Joh. Friedr. Christian Hessel**, Krystallometrie oder Krystallonomie und Krystallographie, auf eigenthümliche Weise und mit Zugrundelegung neuer allgemeiner Lehren der reinen Gestaltenkunde, sowie mit vollständiger Berücksichtigung der wichtigsten Arbeiten und Methoden anderer Krystallographen. (1830.) Erstes Bändchen. Mit 8 Tafeln. Herausgegeben von E. Hess. (192 S.) ℳ 3.—.

» 89. —— —— (1830.) Zweites Bändchen. Mit 3 Tafeln. Herausgegeben von E. Hess. (165 S.) ℳ 2.80.

» 92. **H. Kolbe**, Über den natürlichen Zusammenhang der organischen mit den unorganischen Verbindungen, die wissenschaftliche Grundlage zu einer naturgemässen Classification der organischen chemischen Körper. (1859.) Herausgegeben von Ernst von Meyer. (42 S.) ℳ —.70.

» 94. **E. Mitscherlich**, Über das Verhältniss zwischen der chemischen Zusammensetzung und der Krystallform arseniksaurer und phosphorsaurer Salze. (1821.) Herausgegeben von P. Groth. Mit 35 Figuren im Text. (59 S.) ℳ. 1.—

» 98. —— Ueber das Benzin und die Verbindungen desselben. (1834.) Herausgegeben von J. Wislicenus. (39 S.) ℳ —.70.

»104. **C. M. Guldberg** und **P. Waage**, Untersuchungen über die chemischen Affinitäten. Abhandlungen aus den Jahren 1864, 1867, 1879. Uebersetzt und herausgegeben von R. Abegg. Mit 18 Tafeln. (182 S.) ℳ 3.—.

4888

Alexander Ziwet 2.9

Ueber die

MATHEMATISCHE THEORIE

der

elektrodynamischen Induction

von

RICCARDO FELICI

Assistent für Physik an der k. k. toscanischen Universität.

Uebersetzt

von

Dr. B. Dessau

(Bologna).

Herausgegeben

von

E. Wiedemann

(Erlangen).

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1899.

Physics Lib.

QC
631
.F31
G5
1899

For Phys. lit.
Prof. Alex. Ziwet
gt.
4-30-1923

[1]

Ueber die mathematische Theorie der elektrodynamischen Induction.

Von

Riccardo Felici [1]).

Erste Abhandlung.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Aufstellung der Formeln für eine mathematische Theorie der elektrodynamischen und elektromagnetischen Induction auf ausschliesslicher Grundlage der Versuchsergebnisse und nach der Methode, mit deren Hilfe *Ampère* die elementare Formel für das Gesetz auffand, nach welchem zwei lineare Elemente Volta'scher Stromkreise sich gegenseitig anziehen oder abstossen. Eine gute Versuchsmethode ermöglichte es mir, mit voller Sicherheit die fundamentalen Thatsachen oder Theoreme festzustellen, deren ich bedurfte; die Anwendung der mathematischen Methoden auf diese Thatsachen behufs Auffindung der elementaren Formel, welche die von einem linearen Volta'schen Stromelement in einem ähnlichen Element eines beliebigen Stromkreises inducirte elektromotorische Kraft ausdrückt, bot keine Schwierigkeit.

1. Denken wir uns zwei Drähte, welche zwei geschlossene, einander naheliegende, aber von einander isolirte, d. h. getrennte geschlossene Stromkreise von beliebiger Gestalt bilden. Einer derselben enthalte eine Volta'sche Batterie, der andere stehe mit keiner Elektricitätsquelle in Verbindung. Im Jahre 1830 stellte *Faraday* die folgenden Thatsachen fest:

[1]) Aus den Annali della Università Toscana t. III, 2. Teil 1854. Die im Text eingeklammerten Zahlen sind die Seitenzahlen des Originals.

423148

(*A*) Im Augenblicke der Schliessung des ersten, Volta-schen Stromkreises bewegt sich in dem zweiten Stromkreis ein Strom, dessen Richtung derjenigen des ersten Stromes, d. h. desjenigen der Batterie, entgegengesetzt ist. Dasselbe findet in dem Augenblicke statt, in welchem der Stromkreis geöffnet wird; nur ist in diesem zweiten Falle der in dem anderen Kreise auftretende Strom von derselben Richtung wie derjenige der Batterie.

[2] So lange der Volta'sche Stromkreis geschlossen bleibt, ist, wofern der Abstand beider Stromkreise von einander nicht geändert wird, in dem zweiten Kreise kein Strom zu beobachten.

(*B*) Wird der geschlossene Volta'sche Stromkreis so bewegt, dass er sich dem zweiten Stromkreise nähert, so bewegt sich in diesem ebenfalls ein Strom, dessen Richtung derjenigen des Batteriestromes entgegengesetzt ist.

Entfernt sich dagegen der erste Stromkreis von dem zweiten, so hat der in diesem letzteren erzeugte Strom die nämliche Richtung wie derjenige des Volta'schen Stromkreises.

(*C*) Dieselben Erscheinungen treten auf, wenn der bewegte Volta'sche Stromkreis durch einen gleichfalls bewegten Magnet ersetzt wird; dabei ist an Stelle des Batteriestromes zu beobachten, welche Richtung die Ströme haben würden, welche nach der *Ampère*'schen Theorie den ersten Stromkreis repräsentiren könnten.

Wir werden von jetzt ab den ersten und zweiten Stromkreis beziehungsweise als inducirenden und inducirten Stromkreis und ihre Ströme als inducirenden und inducirten Strom bezeichnen.

Im Allgemeinen wissen wir, dass die Stärke der inducirten Ströme mit derjenigen der inducirenden und mit der Form und dem Abstand der beiden Stromkreise variirt; wir werden nunmehr den Einfluss zu untersuchen haben, welchen auf die Erscheinung jene Factoren ausüben können, die in erster Linie hervortreten und deren Studium die nächste Aufgabe des Physikers bildet, der sich eine klare Vorstellung von den allgemeinen Bedingungen des Phänomens zu machen wünscht.

Hier muss ich nun vor allem den Leser darauf aufmerksam machen, dass ich, da die von mir befolgte Methode rein analytisch-experimentell ist und die Fundamentalversuche vollständig neu sind, um der Einheit und Klarheit der Darstellung willen, in dieser Arbeit davon absehen zu dürfen glaube, die

zahlreichen und werthvollen Untersuchungen[1]) zu erwähnen, welche den meinigen vorausgegangen sind, aber, mit Ausnahme zweier von Herrn *F. E. Neumann* in den Jahren 1845—1847 in den Berichten der Berliner Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Abhandlungen, sowie einiger Seiten einer sehr werthvollen Arbeit des Herrn *Weber* über die Ampère'sche Theorie (Elektrodynamische Massbestimmungen von *Wilhelm Weber*. Leipzig, Weidmann'sche Buchhandlung 1846), durchaus nicht den Zweck verfolgten, welchen ich mir gesetzt habe. Jene Abhandlungen bieten eine rein mathematische Analyse; sie gehen nicht von Versuchsergebnissen aus und gewähren darum zunächst dem Physiker keinerlei Garantie betreffs der Richtigkeit ihrer Resultate. Ich sage: keinerlei, weil dieselben von der Annahme sehr complicirter Gesetze ausgehen, deren Beziehung zu den einfachen und bereits bekannten Gesetzen der Fernewirkungen nicht zu erkennen ist.

[3] Von Herrn *Fechner* rühren, wenn ich nicht irre, die ersten Versuche zur Erklärung der Inductionserscheinungen auf hypothetischer Grundlage her.

Da sonach die Formeln, welche ich mittheilen werde, der Ausdruck von Thatsachen und mithin von jeder Hypothese absolut unabhängig sind, so hätte ich keine Veranlassung, etwa, um meiner Arbeit eine Stütze zu verleihen, die Richtigkeit der von den genannten deutschen Professoren aufgestellten Hypothesen näher zu erörtern. Diese Hypothesen können vielleicht in Zukunft von grossem Nutzen sein; in dem gegenwärtigen Stadium der Wissenschaft jedoch ist es, wenn die Theorie der Induction ebenso wie die Theorie *Ampère*'s der elektrodynamischen Erscheinungen einen Platz in den Lehrbüchern der Physik beanspruchen soll, rathsam, den von diesem grossen Philosophen vorgezeichneten Weg beizubehalten; und die hierbei zu überwindende Schwierigkeit besteht, wie wir sehen werden, nur in der Anstellung leichter und geeigneter Fundamentalversuche nach einer genauen Versuchsmethode.

Die Factoren, welche ich als die am meisten hervortretenden bezeichnete, bezüglich deren man also nach einem ersten Ueber-

[1]) S. die Abhandlungen von Herrn *Abria* in den Ann. de Chimie et de Phys. 3. Ser., Bd. III u. VII; ferner die Arbeiten von Herrn *Henry* in den Transact. of the Amer. Philos. Soc. Jahrg. 1835 u. ff., sowie Bd. III. der Ann. de Chimie etc.; die Abhandl. von *Lenz* über unseren Gegenstand finden sich in *Poggendorff*'s Ann. XXXIV u. XLVII.

blick über die Erscheinung zu wissen verlangt, ob und in welcher Beziehung dieselben beim Zustandekommen oder bei einer Veränderung der Erscheinung betheiligt sind, sind in unserem Falle die folgenden:

Die grössere oder geringere Intensität des inducirenden Stromes.

Die verschiedene Natur der Metalle, welche die Stromkreise bilden.

Die Grösse des Querschnitts oder die Dicke der Drähte dieser Stromkreise.

Die reducirten Längen des inducirten Stromkreises.

Der Abstand zwischen dem inducirten und dem inducirenden Stromkreise, ihre Gestalt und relative Lage.

Zunächst werden wir ausführen, auf welche Weise wir den Grad des Einflusses der vier ersten von den genannten Factoren durch Versuche feststellen können; der fünfte Factor bestimmt das allgemeine Problem, dessen Lösung den Hauptzweck dieser Arbeit bildet.

2. Beginnen wir mit dem Beweis der folgenden Thatsache:

(*a*) »Die Stärke der bei Unterbrechung oder Schliessung des Volta-Stromkreises inducirten Ströme ist, wenn die übrigen Factoren unverändert bleiben, einfach proportional der Kraft der inducirenden Ströme.«[1])

Ich nahm einen hölzernen Cylinder von ungefähr 248 mm Durchmesser und legte um denselben in einer zu seiner Axe senkrechten Ebene eine einzige aber vollständige Windung des Kupferdrahtes, welcher den inducirten Stromkreis bildete oder, genauer gesagt, bilden sollte; so erhielt ich einen genau kreisförmigen Ring, welchen ich den inducirten Ring nennen werde. Die beiden Enden des Drahtes dieses Ringes standen mit dem Galvanometer in Verbindung.

Auf gleiche Weise legte ich mit dem Draht der Batterie [4] um den Cylinder zwei andere Ringe, welche ich als die inducirenden Ringe bezeichnen werde; der eine derselben befand sich oberhalb, der andere unterhalb des inducirten Ringes.

Die sämmtlichen erwähnten Drähte waren mit Seide umwickelt: eine Vorsicht, die ich im Verlaufe meiner Versuche

---

[1]) Mit (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) bezeichnen wir die Thatsachen, welche die Grundlage des analytischen Theiles der Arbeit bilden.

stets, sowohl bei den inducirten wie bei den inducirenden Stromkreisen zur Anwendung brachte.

Die Drähte, welche zur Verbindung des inducirten Ringes mit dem Galvanometer, sowie der inducirenden Ringe mit der Batterie dienten, standen ferner mit einem den Physikern wohlbekannten Apparate in Verbindung, welcher aus verschiedenen Rädern besteht, die bei ihrer Drehung schnell eine Reihe von Unterbrechungen und Schliessungen der beiden Stromkreise bewirken, in Folge deren in das Galvanometer nur die in einer und derselben Richtung inducirten Ströme eintreten können, das heisst also nur die bei der Unterbrechung oder nur die bei der Schliessung des Volta-Stromkreises erzeugten Ströme. Auf diese Weise kann man in sehr kurzer Zeit eine grosse Anzahl inducirter Ströme in das Galvanometer senden, und dieses vermag somit ausserordentlich viel stärkere Ausschläge zu liefern, als sie bei einmaliger Unterbrechung oder Schliessung des Stromkreises der Batterie, also des inducirenden Stromkreises, erhalten werden könnten. Bei der Beschreibung der Versuche im Folgenden wird der Gebrauch dieses Apparats immer vorausgesetzt.

Die Drähte des inducirten Stromkreises, welche zum Ringe führten, waren zusammengedreht, und das Gleiche geschah mit denjenigen des inducirenden Stromkreises, welche zur Batterie und zu den Ringen führten. Dank dieser Anordnung brauchte ich die Inductionswirkungen auf diejenigen Theile der Stromkreise, welche nicht die Ringe bildeten, nicht in Betracht zu ziehen; ich bemerke gleich, dass ich eine ähnliche Anordnung im ganzen Verlauf dieser Untersuchung benutzte.

Das Galvanometer des inducirten Stromkreises besass eine hohe Empfindlichkeit, so dass es einen Ausschlag von 60 Grad gab, wenn es von dem Strome eines einzigen nur durch die Wärme der Hand beeinflussten thermo-elektrischen Eisen-Kupfer-Elementes durchflossen war. Wo im Verlaufe dieser Arbeit von einem Galvanometer die Rede sein wird, ist immer dasjenige des inducirten Stromkreises gemeint.

Meine Batterie bestand aus mehreren Grove-Elementen.

Zu besserem Verständniss sei bemerkt, dass die erwähnten Ringe einander gleich und parallel sind und dass ihre Mittelpunkte sich auf der nämlichen Normalen zu ihren Ebenen befinden. Zwei Fälle sind nun möglich: die inducirenden Ströme können dieselbe oder entgegengesetzte Richtung haben; im ersten Falle werden die Inductionswirkungen der beiden

inducirenden Ringe sich summiren und in dem zwischen ihnen befindlichen inducirten Ringe einen stärkeren inducirten Strom erzeugen, im zweiten Falle dagegen werden diese Wirkungen sich gegenseitig ganz oder theilweise aufheben und somit einen schwächeren inducirten Strom hervorbringen.

Sind die inducirenden Ringe gleichweit von dem inducirten Ringe [5] entfernt, so bleibt die Nadel des Galvanometers sowohl für die bei der Schliessung als für die bei der Unterbrechung des inducirenden Stromkreises inducirten Ströme auf Null, wenn die inducirenden Ströme entgegengesetzte Richtung haben. Man braucht jedoch in diesem Falle nur etwa vier Grove-Elemente zu benutzen, um schon bei einem sehr kleinen Unterschiede zwischen diesen Entfernungen, wenn dieselben nicht viel grösser sind als 10 cm, einen Ausschlag von 30 Grad oder mehr im Galvanometer hervorzurufen.

Ich bemerke, dass besonders in den inducirten Stromkreis keine zu grossen Widerstände eingeführt werden dürfen und dass dieser darum nicht aus zu dünnen Drähten bestehen soll. Der Durchmesser der von mir benutzten Drähte betrug gewöhnlich $^2/_3$ mm.

Wird einer der inducirenden Ringe von dem inducirten entfernt oder demselben genähert und darauf in der bereits geschilderten Weise durch Unterbrechung oder Schliessung des Stromkreises der Batterie ein Inductionsstrom erzeugt, so zeigt die Nadel des Galvanometers einen Ausschlag nach der rechten oder linken Seite des Beobachters, je nachdem der verschobene Ring sich in grösserer oder geringerer Entfernung vom inducirten Ringe befindet als der andere, inducirende Ring.

Ich wählte ein Bündel sehr feiner mit Seide bedeckter Kupferdrähte[1]), deren Länge diejenige des Umfanges meiner Ringe etwas übertraf. Die Enden dieser Drähte, von welchen die isolirende Seidenumhüllung entfernt war, wurden fest zusammengedrillt, so dass der Batteriestrom, welcher das Bündel zu passiren hatte, sich gleichzeitig und zu gleichen Theilen auf jene Drähte verzweigen musste.

Ein derartiges Bündel wurde an Stelle des Drahtes,

[1]) S. in der in Florenz erscheinenden Gazzetta Medica Italiana Federativa Toscana T. I., Serie II die nach meiner Methode von Dr. *E. Tabani* ausgeführten Versuche.

welcher einen der inducirenden[1]) Ringe bildete, in den Stromkreis der Batterie eingeschaltet.

Hatte bei diesem Versuche der inducirende Strom in den beiden inducirenden Ringen entgegengesetzte Richtung und waren die Abstände beider Ringe die gleichen, so zeigte das Galvanometer weder bei der Oeffnung noch bei der Schliessung des Batteriestromkreises einen Ausschlag; es hatte also in dem genau in der Mitte zwischen den beiden inducirenden Ringen befindlichen inducirten Ringe keine merkliche Induction stattgefunden.

Es ist also, wenn n die Anzahl der Drähte war, aus welchen das Bündel bestand, zu schliessen, dass »eine Anzahl von n inducirenden Strömen, deren Intensität jeweilen K/n beträgt, die nämliche Induction hervorruft, wie ein inducirender Strom gleich K« wie dies in der That nach dem Theorem, welches wir beweisen wollten, der Fall sein muss.

3. Die unter (*a*) aufgeführte Thatsache lässt sich mittels des folgenden Versuches beweisen, welcher mir zugleich Gelegenheit giebt, die Beschreibung meiner Versuchsmethode zu vervollständigen.

Ich nahm zwei dem vorerwähnten ähnliche Cylinder [6] und wickelte auf jeden derselben in der beschriebenen Weise einen Ring von dem zum inducirten Stromkreise benutzten Draht; diese beiden Ringe, welche mit dem Galvanometer in Verbindung standen, werden als inducirte Ringe bezeichnet werden. Mit dem Drahte der Batterie oder des inducirenden Stromkreises stellte ich auf gleiche Weise zwei inducirende Ringe her; jeder derselben befand sich auf einem der Cylinder ungefähr 10 cm weit von seinem inducirten Ringe entfernt. Die beiden Cylinder wurden darauf, damit sie sich gegenseitig nicht beeinflussen konnten, in grossen Abstand von einander gebracht.

Wir haben in diesem Versuche zwei Paare, von welchen jedes aus einem inducirenden und einem inducirten Ringe besteht; sind die beiden inducirten Ströme, welche bei Unterbrechung oder Schliessung des Batteriestromes entstehen können, im Galvanometer entgegengesetzt gerichtet und sind die Entfernungen der Ringe von einander in beiden Paaren die gleichen, so wird das Galvanometer keinen Ausschlag anzeigen.

---

[1]) Im Original heisst es irrthümlicherweise: »inducirten.«

Man kann nun, während alles Uebrige unverändert bleibt, die erwähnten Ringe aus zahlreichen Drahtwindungen herstellen, von welchen jede einen vollständigen Kreisumfang bildet und welche eng anschliessend über einander gelagert sind.

Es sei m die Anzahl der Windungen des inducirten und n die Anzahl derjenigen des inducirenden Stromkreises, welche beziehungsweise den inducirten und den inducirenden Ring auf einem der beiden Cylinder bilden, m' und n' seien die entsprechenden Zahlen für den anderen Cylinder. Der Versuch ergiebt dann, dass in unserem Falle, wenn das Galvanometer bei Unterbrechung oder Schliessung des Batteriestromkreises in Ruhe bleiben soll, das heisst also wenn die von den beiden Paaren inducirten Ströme einander gleich sein sollen, die Gleichung

$$m \cdot n = m' \cdot n'$$

bestehen muss, deren Deutung ohne Weiteres einleuchtet und die Richtigkeit des Satzes (*a*), die wir durch den Versuch feststellen wollten, vollständig beweist.

4. Wir wollen nunmehr beweisen, dass »die Stärke der inducirten Ströme von dem Querschnitt der Drähte und der Natur der Metalle, aus welchen die Stromkreise bestehen, unabhängig ist«.

Um diesen Beweis zu liefern, genügt es, in dem ersten Versuch des § 2, bei welchem ein Cylinder mit zwei inducirenden Ringen und einem genau in der Mitte zwischen beiden befindlichen inducirten Ringe benutzt worden war, den Kupferdraht eines der inducirenden Ringe durch einen Blei- oder Eisendraht zu ersetzen; ebenso kann man auch das Kupfer durch Zink, Wismut, Antimon etc. ersetzen, indem man durch Giessen in Formen aus diesen Metallen Ringe vom Durchmesser des beschriebenen Cylinders herstellt.

Man sieht ohne weiteres, dass dieselbe Versuchsanordnung auch für zwei inducirte Cylinder mit einem zwischen beiden in der Mitte befindlichen inducirenden Cylinder dienen kann. Trägt man dafür Sorge, dass in jedem Falle die inducirten Ströme das Galvanometer in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen, so zeigt das Instrument keine Ablenkung, womit der gesuchte Beweis geliefert ist.

[7] Ich habe die Versuche dieses Paragraphen mit einer Batterie von mehr als hundert Grove-Elementen angestellt,

die Herr Professor *C. Matteucci*, der dieselben gerade für verschiedene Versuche benutzte, freundlichst zu meiner Verfügung gestellt hat. So hatte ich vollauf Gelegenheit, mich von der hohen Empfindlichkeit der benutzten Versuchsmethode zu überzeugen.

5. Die Hauptvortheile meiner Methode sind die folgenden: Dieselbe macht die Resultate unabhängig von der reducirten Länge der Stromkreise, unabhängig von beliebigen Aenderungen der Kraft der Batterie, sowie von Aenderungen im Magnetismus des astatischen Systems des Galvanometers; sie bringt es ferner mit sich, dass die inducirenden Kräfte von selbst durch das Galvanometer gemessen werden, dessen Nadel dieselbe Aufgabe erfüllt wie die Nadel der empfindlichsten Waage.

Der Leser, der aus Erfahrung weiss, wie schwer sich mit den gegenwärtig benutzten Methoden, nämlich aus der Ablenkung des Galvanometers, aus dem Magnetismus, welchen Nadeln unter der Einwirkung der fraglichen Ströme erlangt haben, oder nach anderen mehr oder minder indirecten Verfahren die Stärke von Strömen und insbesondere von Inductionsströmen bestimmen lässt — und der ferner weiss, wie schwer es ist, eine besonders starke Batterie lange Zeit hindurch constant zu erhalten, oder reducirte Längen in verschiedenen Stromkreisen zu berücksichtigen — dieser Leser wird die Wahl meiner Methode durchaus billigen.

Was die von Herrn *Abria* bei seinen sehr bemerkenswerthen Arbeiten über die Induction benutzte Methode anbelangt, so finde ich in Bezug auf dieselbe die folgenden Worte von *Pouillet* in der vierten Auflage der Elemente der Experimentalphysik:

»Ce moyen de comparaison ne peut pas sans doute donner des rapports d'intensité parfaitement rigoureux, mais il conduit du moins à des approximations qu'il faut bien accepter, en attendant que l'on découvre une méthode plus sûre.«

Nach *Henry*'s Beobachtungen fallen die Intensitäten, mit welchen die Inductionsströme sich kundgeben, verschieden aus, je nachdem sie mit dem Galvanometer, mittels der Erschütterung, mittels ihrer Fähigkeit Stahlnadeln zu magnetisiren etc. gemessen werden. Diese Unterschiede brauchen wir indessen für's erste nicht zu berücksichtigen. Für uns ist der elektrische Strom die Kraft, welche eine Magnetnadel nach den bekannten Gesetzen von *Oersted* und *Ampère* zu bewegen

vermag und welche unter vielerlei bekannten Umständen vorübergehend von einem Stromkreise erworben werden kann: wir halten uns so an die einfache wissenschaftlich feststehende Thatsache, ohne ihre Auffassung weiter zu erörtern, da diese Definition genügt, um Missverständnisse auszuschliessen. Unser Zweck ist die Bestimmung des algebraischen Werthes einer elektromotorischen Kraft. Bleiben dann im Falle der Induction, wenn die Widerstände der Stromkreise und die inducirenden Kräfte Veränderungen erfahren oder der inducirte Stromkreis gewissen besonderen Verhältnissen unterliegt — wenn z. B. [8] der inducirte Strom eine secundäre Wirkung auf den inducirten Stromkreis ausübt und somit eine zweite Induction hervorruft — gewisse Eigenschaften der Ströme nicht in constantem Verhältniss zu einander, so ist dies naturgemäss der Entstehungsweise dieser Ströme, ihrer Intensität, der Heftigkeit, mit welcher das elektrische Gleichgewicht in einem Stromkreise durch eine momentane Fernewirkung gestört wird, zuzuschreiben; man darf andererseits auch nicht übersehen, dass den erwähnten analoge Verschiedenheiten auch bei den gewöhnlichen Volta-Strömen anzutreffen sind, wenn die Widerstände und elektromotorischen Kräfte in weitem Umfange variirt werden.

Wie dem aber auch sein möge, uns genügt hier die Untersuchung der einfachsten Fälle, um aus denselben fundamentale und hinreichend einfache und klare Thatsachen zu gewinnen und zu einer algebraischen Darstellung (ich sage nicht Erklärung) des Vorganges zu gelangen, welche allein im Stande ist, die zur weiteren Verfolgung nothwendigen Vorstellungen zu bieten. Würden wir in anderer Weise vorgehen, welchen Nutzen würden wir etwa aus einer vorzeitigen Speculation über die ungemein verwickelten Versuchsergebnisse ziehen können? Würden wir nicht auf diese Weise uns Schwierigkeiten bereiten, die wir zunächst nicht zu überwinden vermögen, oder denen wir nur mit pomphaften Phrasen begegnen könnten, die der wahren Wissenschaft fremd sind und, wie es öfter schon den Physikern ergangen ist, unsern Geist blenden und uns in den Erscheinungen Eigenthümlichkeiten suchen lassen würden, die nur in unserer Vorstellung existiren? Fahren wir statt dessen in unserer Arbeit fort.

6. »Die Stärke der inducirten Ströme steht in umgekehrtem Verhältniss zur reducirten Länge des inducirten Stromkreises.«

Um diese Thatsache zu beweisen, ist es zweckmässig, das Differentialgalvanometer des Herrn *Becquerel* zu gebrauchen.

Ich nahm die in § 3 beschriebenen beiden Holzcylinder, von welchen jeder einen inducirten und einen inducirenden Ring trug, setzte aber bei diesem Versuche die beiden inducirten Ringe, anstatt sie zu einem einzigen Stromkreise zu verbinden, gesondert mit den beiden Stromkreisen des Differentialgalvanometers in Verbindung.

Nehmen wir an, die Zahl der Windungen, welche die inducirenden Ringe bilden, betrage auf jedem Cylinder 24, jeder inducirte Ring dagegen bestehe aus einer einzigen Windung; der Abstand zwischen dem inducirenden und dem inducirten Ringe sei auf beiden Cylindern, A und B, der gleiche, und ebenso seien die beiden getrennten inducirten Stromkreise einander gleich. Die bei Unterbrechung oder Schliessung des Stromkreises der Batterie inducirten Ströme mögen in dem Galvanometer entgegengesetzte Richtungen haben.

Dies vorausgesetzt, wird das Galvanometer bei Schliessung oder Unterbrechung des erwähnten Stromkreises auf Null bleiben.

Der Versuch lehrt nun Folgendes: verdoppelt man die reducirte Länge des inducirten Stromkreises, von dem ein Theil den Ring des Cylinders A bildet, so muss, wenn das Galvanometer auf Null bleiben soll, die Zahl der Windungen des inducirenden Ringes auf dem Cylinder B auf die Hälfte, das heisst auf 12, vermindert werden; wird die bezeichnete reducirte Länge auf dem Cylinder A vervierfacht, so muss zu dem gleichen Zwecke die Zahl der inducirenden Ringe auf dem Cylinder B auf ein Viertel, also auf 6, vermindert werden; u. s. f.

[9] Erinnern wir uns nun gleichzeitig mit diesem Versuche an den in § 3 beschriebenen, so werden wir schliessen, dass der gesuchte Beweis erbracht ist.

Die sämmtlichen bisher bewiesenen Thatsachen betreffen die in § 1 mit (A) bezeichnete Klasse von Erscheinungen, nämlich die bei Unterbrechung oder Schliessung des Volta-Stromkreises inducirten Ströme. Ich habe mit dieser Klasse begonnen, weil dieselbe sich nach meiner Methode leichter zu exacten Versuchen eignet als der Fall der bei Bewegung der Stromkreise inducirten Ströme. Diesen, in § 1 mit (B) bezeichneten Fall haben wir nunmehr zu betrachten. Zuvor jedoch wollen wir sehen, ob sich eine Thatsache entdecken oder experimentell feststellen lässt, welche die eine Klasse von Erscheinungen mit der anderen in Beziehung bringt, so dass die später etwa für die eine Klasse aufzustellende Theorie ohne

ersten in die zweite Lage inducirten Ströme ungefähr gleichzeitig, das heisst bevor die Nadel des Galvanometers sich merklich aus ihrer Ruhelage entfernt hat, auf das Galvanometer einwirken zu lassen, so ist die Wirkung dieser Partialströme auf das Galvanometer gleichwerthig mit derjenigen eines einzigen Stromes, der gleich der Summe der sämmtlichen erwähnten Ströme ist. Und in diesem Falle lässt sich der gesuchte Beweis erbringen.

Bei den Versuchen über die Bewegung des Stromkreises ist man fast stets gezwungen, zu einer Rotationsbewegung von der Art der im Folgenden beschriebenen zu greifen. Man muss den Stromkreisen eine derartige Gestalt und Lage geben, dass sich im Voraus die Lagen bestimmen lassen, durch welche der Leiter bei seiner Rotationsbewegung periodisch [11] gehen muss und in welchen ein dort aufgestellter Stromkreis bei Schliessung oder Unterbrechung des Volta-Stromkreises keinen Inductionsstrom geben würde. Auf folgende Weise habe ich in einem Specialfall dieser Bedingung genügt.

Ich nahm drei gleiche hölzerne Scheiben von 248 mm Durchmesser und 10 mm Dicke; in jeder derselben waren zwei Rinnen zur Aufnahme des Leitungsdrahtes angebracht. Die eine dieser Rinnen verlief längs eines Durchmessers, die andere, genau kreisförmige, befand sich auf dem Umfang der Scheibe und traf die erste an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen. Ich befestigte zunächst einen Punkt des Leitungsdrahtes an einem Ende der diametralen Rinne, führte ihn dann durch diese und hierauf längs einer Hälfte der kreisförmigen Rinne, so dass ich ein D beschrieb, nach dessen Vollendung ich wieder an der Befestigungsstelle des Drahtes, die den Ausgangspunkt gebildet hatte, angelangt war.

Darauf führte ich den Draht abermals längs der diametralen Rinne, legte ihn dann aber in die andere Hälfte der kreisförmigen Rinne, und nachdem ich auch diese zurückgelegt hatte, kehrte ich abermals an den Ausgangspunkt zurück; ich hatte so ein zweites D beschrieben, dessen Curve jedoch die entgegengesetzte Lage wie diejenige des ersten hatte. Die beiden D waren sonach mit ihren gradlinigen Theilen genau übereinandergelagert und befanden sich in derselben Ebene.

Auf den drei Scheiben erhielt ich auf diese Weise drei gleiche Stromkreise.

Die Mittelpunkte dieser drei Stromkreise wurden auf einer

und derselben horizontalen Geraden und ihre Ebenen senkrecht zu dieser Geraden angeordnet.

Der mittlere Stromkreis stand mit dem Galvanometer in Verbindung; die beiden anderen gehörten demselben Stromkreise der Batterie an.

Es befand sich also ein inducirter Stromkreis zwischen zwei inducirenden.

Wir wollen jetzt annehmen, die Richtungen der beiden inducirenden Ströme seien mit Bezug auf den inducirten Stromkreis einander entgegengesetzt und die diametralen Rinnen der beiden inducirenden Stromkreise seien zu einander parallel; im übrigen sei der Versuch nach der bereits beschriebenen Methode angeordnet.

Ist die Anzahl der Windungen des Batteriedrahtes in den beiden inducirenden Stromkreisen die gleiche, das heisst also ist die Operation, wie ich sie für die Herstellung eines Stromkreises mit einer einzigen Windung beschrieben habe, bei beiden Stromkreisen die gleiche Anzahl von Malen vorgenommen worden, so unterliegt der in der Mitte des Abstandes zwischen den beiden anderen Stromkreisen befindliche inducirte Stromkreis entgegengesetzten und gleichen Kräften, und die Nadel des Galvanometers giebt bei Schliessung oder Unterbrechung des Batteriestromes keinen Ausschlag.

Ist dagegen die Anzahl der Windungen in den beiden inducirenden Stromkreisen nicht die gleiche, so befindet sich diese Gleichgewichtslage näher zu dem einen inducirenden Stromkreise als zu dem anderen. Ein Physiker, welcher meine Versuchsanordnung benutzen wird, wird finden, dass die Bestimmung dieser Lage, [12] oder der Gleichgewichtsdistanzen, leicht und einer bei den elektrischen Erscheinungen seltenen Genauigkeit fähig ist.

Ich setze also voraus, eine derartige Gleichgewichtslage sei gefunden für den Fall, dass die diametrale Rinne der inducirten Scheibe parallel gerichtet sei zu den in fester Lage und parallel zu einander befindlichen diametralen Rinnen der inducirenden Scheiben, das heisst der Scheiben, auf welchen sich die inducirenden Ringe befinden.

Der Leser, welcher sich von meinen Stromkreisen eine genaue Zeichnung angefertigt hat, wird erkennen, dass kein inducirter Strom vorhanden ist, wenn die diametrale Rinne des inducirten Stromkreises senkrecht zu den diametralen Rinnen der inducirenden Stromkreise steht; ebenso wird

er erkennen, dass der inducirte Strom ein Maximum erreicht, wenn die drei Rinnen zu einander parallel gerichtet sind.

Nehmen wir an, der Stromkreis der Batterie sei beständig geschlossen, so wird ein rascher Uebergang des inducirten Leiters aus der senkrechten in die parallele Stellung der Rinnen durch eine Drehung von 90 Grad um die horizontale Gerade, welche die Mittelpunkte der drei Stromkreise mit einander verbindet, die Entstehung zweier von den beiden inducirenden Stromkreisen inducirter Ströme in dem gleichen ersten Stromkreise zur Folge haben.

Wenn aber der inducirte Leiter, nachdem er diese 90 Grad durchlaufen hat, seine Drehung fortsetzt, so wird eine weitere Drehung von 90 Grad, welche er nunmehr auf der anderen Seite der die Diametralrinnen der inducirenden Stromkreise verbindenden Ebene beschreibt, einen neuen inducirten Strom hervorrufen, u. s. f.

Nehmen wir nun an, der inducirte Stromkreis rotire mit einer gewissen Geschwindigkeit (etwa zwei oder vier Drehungen pro Secunde genügen) um seinen Mittelpunkt, wobei er, wie schon gesagt, beständig in der zu den beiden anderen Stromkreisen parallelen Ebene bleiben soll; und denken wir uns, vermöge seiner Rotation (vermittels eines Räderwerkes, dessen Räder auf der Axe des Apparates montirt sind, theils aber aus Metall und theils aus nichtleitendem Material bestehen, sowie mit Hilfe von Federn, welche auf diesen Rädern schleifen, im Uebrigen aber befestigt sein sollen) bleibe der inducirte Stromkreis zu gewissen Zeiten unterbrochen, so dass in das Galvanometer nur diejenigen Ströme gelangen können, welche in der nämlichen Richtung inducirt sind, also die Nadel des Galvanometers nach derselben Seite abzulenken vermögen.

Im Allgemeinen wird die Nadel des Galvanometers, je nach den Entfernungen zwischen dem inducirten Stromkreise und den inducirenden, nach rechts oder nach links abgelenkt; sind aber diese Entfernungen solche, dass für sie bei paralleler und unbeweglicher Stellung der diametralen Rinnen die durch Unterbrechung des Volta-Stromkreises hervorgerufenen inducirenden Kräfte mit einander im Gleichgewicht sind, so lehrt der Versuch, dass in diesem Falle auch bei Bewegung des inducirten Stromkreises das Galvanometer keinen merklichen Strom anzeigt.

Das Gleichgewicht, welches in dem ersten Falle der durch Unterbrechungen, [13] das heisst bei Oeffnung und Schliessung des Volta-Stromkreises inducirten Ströme stattfindet, besteht also ebenfalls in dem zweiten Falle der Bewegung; und diese Thatsache fordert, dass die Summe der Ströme, welche beim Uebergang aus der senkrechten Lage der Rinnen (derjenigen Lage, in welcher die Inductionswirkung eines jeden der beiden Stromkreise für sich allein gleich Null ist) in die parallele Lage inducirt werden, für jeden der beiden inducirenden Stromkreise für sich allein die gleiche ist.

Man kann den geschilderten Versuch unter Abänderung der Form der Stromkreise wiederholen, doch ist dabei grosse Sorgfalt darauf zu verwenden, dass die für den gesuchten Beweis erforderlichen Bedingungen genau eingehalten werden.

Indess muss zugestanden werden, dass dieser Versuch allerdings nicht unmittelbar die Gleichheit beweist, von der im Theorem (*b*) des § 8 die Rede ist; derselbe beweist jedoch alles, was in unserem Falle theoretisch nothwendig ist, insofern er den strengen Beweis dafür liefert, dass das Verhältniss zwischen den beiden von uns mit A und B bezeichneten Quantitäten eine in allen Fällen constante Grösse ist.

Wir sind sonach durch den Versuch berechtigt, mittels der algebraischen Analyse der Erscheinungen aus der Thatsache (*b*) unmittelbar den folgenden Satz abzuleiten:

»Die Summe der in einer beliebigen Zeit durch Uebergang des Volta-Stromkreises aus einer Lage in eine andere inducirten Ströme ist gleich der Differenz zwischen den beiden Strömen, welche man durch Induction hätte erzeugen können, wenn man denselben Stromkreis nach einander in den erwähnten beiden Lagen unbeweglich gehalten und geschlossen hätte.«

Ein derartiger Satz führt beinahe mit Nothwendigkeit zur Annahme der permanenten Wirkung des inducirenden auf den inducirten Stromkreis, von welcher ich in der in § 5 eingeschalteten kurzen Betrachtung bereits gesprochen habe. Diese Einwirkung wurde zum ersten Male von *Faraday* vermuthet, dann aber von diesem Physiker nicht weiter verfolgt und von anderen Experimentatoren, mit Ausnahme von *Nobili* und *Antinori*, sogar in Abrede gestellt. Bei dem Leugnen einer derartigen permanenten Einwirkung kann man sich indessen nur darauf berufen, dass dieselbe bis jetzt in den Versuchen nicht direct zum Vorschein gekommen ist.

9. Bei der Aufstellung seiner Theorie hatte *Ampère* erkannt, dass es, um den Einfluss der relativen Richtung zweier Voltastrom-Elemente analytisch zu erörtern, zweckmässig sei, diese Elemente — etwa wie man dies allgemein mit den auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräften zu thun pflegt — durch ihre drei Projectionen auf drei orthogonale Axen zu ersetzen. Und indem er untersuchte, ob diese Substitution mit den Thatsachen in Einklang sei, stellte er unter seinen Fundamentalsätzen ein Theorem auf, welches dem im folgenden aufgestellten nahezu ganz analog ist:

(*c*) »Eine sehr kleine geradlinige Strecke eines linearen Leiters, welcher den Stromkreis einer Batterie oder denjenigen Stromkreis bildet, der der Induction seitens des ersteren unterliegen soll, lässt sich durch eine andere sehr kurze, aber krummlinige Strecke ersetzen, welche nur der Bedingung genügt, dass ihre Enden mit denjenigen der geradlinigen Strecke zusammenfallen; practisch gelangt man auf diese Weise, indem man die gleiche Substitution für sämmtliche nahezu geradlinigen Theilchen ausführt, in welche man einen beliebigen Leiter zerlegen kann, [14] dahin, einen zweiten zickzackförmigen Leiter zu bilden, der die Curve des ersten Leiters in kurzen Abständen schneidet und die gleiche Fähigkeit wie dieser besitzt, sei es einen Strom zu induciren, falls er den Stromkreis einer Batterie bildet, sei es eine Induction zu erfahren, das heisst einen inducirten Strom zu zeigen, falls er den inducirten Stromkreis bildet.«

Zur Bestätigung dieses Satzes (*c*) brauchte ich selbstverständlich nichts anderes zu thun, als einen inducirten Leiter zwischen zwei inducirende zu bringen, von welchen der eine zickzackförmig oder auf ähnliche Weise gebogen war, der andere nicht; oder ich konnte einen inducirenden Stromkreis zwischen zwei inducirte bringen, die die gleichen Verhältnisse wie die vorigen inducirenden Leiter darboten, und dann beobachten, ob die von den beiden inducirenden Stromkreisen in dem einen inducirten, oder die von dem einen inducirenden in den beiden inducirten Stromkreisen wachgerufenen Ströme sich in einem Galvanometer, in welchem sie entgegengesetzte Richtung besitzen, genau das Gleichgewicht halten — was auch in der That der Fall war.

10. Der Satz (*c*) beweist, dass man einem kleinen Theil eines inducirten oder inducirenden Leitungsdrahtes das Vieleck substituiren kann, dessen Seiten den Projectionen der besagten

geradlinigen Strecke auf drei rechtwinklige Axen gleich und parallel sind. Es seien ds und ds' bezw. je ein Element des inducirenden und des inducirten Leiters, r die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte, θ und θ' die Winkel, welche ihre Richtungen mit der stets in demselben Sinne genommenen Richtung von r einschliessen, endlich δ der Winkel, welchen die beiden durch r und je eines der Elemente gehenden Ebenen mit einander bilden. Nach dem Gesagten kann, wie man sieht, ds durch zwei andere Elemente oder Projectionen

$$ds \cdot \sin\theta\,; \quad ds \cdot \cos\theta\,,$$

und ds' durch die Projectionen

$$ds' \cdot \cos\theta'\,; \quad ds' \cdot \sin\theta' \cdot \cos\delta\,; \quad ds' \cdot \sin\theta' \cdot \sin\delta$$

ersetzt werden.

Man beobachte nun, dass das Element $ds \cdot \sin\theta$ auf die Elemente $ds' \cdot \cos\theta'$ und $ds' \cdot \sin\theta' \cdot \sin\delta$ gar nicht inducirend wirken und ebensowenig von denselben, falls es der inducirte Leiter wäre, eine Induction erfahren könnte; oder genauer gesagt könnte dasselbe in diesen Elementen nur gleiche und von ihren Mittelpunkten aus nach beiden Seiten entgegengesetzt gerichtete Ströme erzeugen, weil das Element $ds' \cdot \cos\theta'$ einer Geraden, nämlich der r, angehört, welche durch die Mitte des Elementes $ds \cdot \sin\theta$ geht und zu demselben normal gerichtet ist, wie andererseits das Element $ds' \cdot \sin\theta' \cdot \sin\delta$ normal ist zur Richtung von $ds \cdot \sin\theta$ und ebenso zur Geraden r, welche durch seinen Mittelpunkt geht und ihrerseits zu beiden Elementen normal ist.

Die gleiche Ueberlegung wiederhole man bezüglich des Elementes $ds \cdot \cos\theta$ und der beiden anderen Elemente

$$ds' \cdot \sin\theta' \cdot \cos\delta \quad \text{und} \quad ds' \cdot \sin\theta' \cdot \sin\delta\,;$$

[15] es ergiebt sich dann, dass die Induction des Elementes

$$ds \cdot \sin\theta \quad \text{auf} \quad ds' \cdot \sin\theta' \cdot \cos\delta$$

und des Elementes

$$ds \cdot \cos\theta \quad \text{auf} \quad ds' \cdot \cos\theta'\,,$$

oder umgekehrt, allein übrigbleibt.

Es ist dabei immer angenommen, dass r im Verhältniss zu ds und ds' sehr gross sei.

Die Versuche der Paragraphen 3 und 4 führen ohne

Schwierigkeit zu dem Schlusse, dass die in dem inducirten Elemente entwickelte elektromotorische Kraft der Länge des inducirenden sowohl wie des inducirten Elementes proportional ist. Bezeichnen wir also mit ds und ds' diese beiden Längen, mit A und B zwei Constanten, deren Grösse von der Stärke der Batterie und von allen anderen Versuchsbedingungen abhängt, welche nicht in der Richtung und dem Abstand der Elemente von einander inbegriffen sind und deshalb nicht in den Bereich der gegenwärtigen Untersuchungen fallen, die nicht der Ursache der Erscheinungen nachgehen, sondern sich nur mit den galvanometrisch messbaren Wirkungen befassen; ziehen wir dann noch in Betracht, dass die erwähnte elektromotorische Kraft, welche wir mit d^2E bezeichnen wollen, von einer Function $f(r)$ des Abstandes r abhängig ist, so können wir schreiben:

$$(1)\quad d^2E = f(r)\cdot(A\cos\theta\cdot\cos\theta' + B\sin\theta\cdot\sin\theta'\cdot\cos\delta)\,ds\cdot ds'.$$

Die beiden willkürlichen Constanten A und B sind in die Gleichung (1) um der nöthigen Allgemeinheit willen eingeführt; wie wir später sehen werden, kann man, falls die Betrachtung auf den Fall der geschlossenen Ströme beschränkt bleibt, statt dessen die beiden Constanten einander gleich oder $B = 0$ setzen und nur A beibehalten. Gleichbedeutend damit wäre die Aussage, dass, falls die beiden Elemente ds und ds' normal zur Verbindungslinie r ihrer Mittelpunkte gerichtet und im Vergleich zu dieser sehr klein sind, das heisst also falls man dieselben als zwei Punkte an den Enden einer Linie betrachten darf, dann keine inducirte elektromotorische Kraft, das heisst keine Veranlassung für eine Bewegung der Elektricität besteht, die eher nach der einen als nach der anderen Seite normal zur Linie r, längs deren die inducirende Kraft wirksam ist, gerichtet wäre. Indessen ist eine derartige Ueberlegung nicht vollkommen genau, ja sie kann vielleicht sogar vollständig falsch sein; gleichwohl durfte sie mit dem Vorbehalt, dass sie zu nichts verpflichtet, nicht unerwähnt bleiben.

Alle bisher von den Physikern angestellten Versuche über die Aenderung der Kraft des inducirten Stromes bei Aenderung des Abstandes zwischen den beiden Stromkreisen haben zwar noch in keinem besonderen Falle — mit Ausnahme des Satzes (d) [1]), welchen ich [16] vor einigen Monaten in dem

[1]) S. den folgenden § 13.

von Prof. *Tortolini* in Rom publicirten Journal mittheilte und den ich im Folgenden noch behandeln werde — ein mathematisch formulirbares Gesetz dieser Kraft kennen gelehrt, aber sie beweisen immerhin, dass der Betrag der Function $f(r)$ mit Zunahme der Variablen r beständig abnimmt und, ohne sein Vorzeichen zu ändern, für $r = \infty$ gleich Null wird. Die allgemeine Form, welche wir bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft jener Function zuschreiben könnten, wäre sonach diejenige einer nach umgekehrten Potenzen der Variablen geordneten Reihe. Der Einfachheit halber werden wir jedoch die Form dieser Function einschränken und nur ein beliebiges Glied derselben herausgreifen; wir setzen also, indem wir mit n eine beliebige Zahl bezeichnen,

$$f(r) = \frac{1}{r^n},$$

wobei indessen diese Wahl durch die Art der Bestimmung der Constanten n gerechtfertigt werden wird. Bezeichnet ε den Winkel, welchen die Richtungen von ds und ds' mit einander einschliessen, so ist

$$\cos\varepsilon = \cos\theta \cdot \cos\theta' + \sin\theta \cdot \sin\theta' \cdot \cos\delta$$

und demnach

$$(2) \qquad d^2E = \frac{ds \cdot ds'}{r^n}[(A - B)\cos\theta \cdot \cos\theta' + B\cos\varepsilon].$$

Der Betrag der gesammten elekromotorischen Kraft, welche in dem geschlossenen linearen Stromkreise s' durch momentane Unterbrechung oder Schliessung des inducirenden oder Batteriestromkreises s entwickelt wird, ergiebt sich mittels zweier über die beiden Stromkreise zu erstreckender Integrationen.

In dem inducirenden Stromkreise ist die Variable s von einem beliebigen Punkte dieses Stromkreises aus, aber in der Richtung des Batteriestromes zu messen. Im inducirten Stromkreise kann die Richtung, in welcher s' zu nehmen ist, und ebenso der Ausgangspunkt nach Belieben gewählt werden; um eine Festsetzung zu treffen, wollen wir jedoch annehmen, es circulire in diesem Stromkreise ein Strom in einer bestimmten Richtung, etwa der bei Unterbrechung des Batteriestromes inducirte Strom, und wir rechnen dann s' in der Richtung dieses Stromes. Die Winkel θ und θ' werden wir immer

zwischen den beiden Schenkeln messen, von welchen der eine durch diejenige Hälfte des betrachteten Elementes, in welcher sich der angenommene Strom vom Scheitel des Winkels entfernt, der andere sowohl für θ als für θ' durch die stets in dem gleichen Sinne genommene Richtung von r gebildet ist; als Winkel ε gilt derjenige, in dessen beiden Schenkeln sich die beiden Ströme vom Scheitel entfernen.

11. Die Gleichung (2) lässt sich in verschiedene Formen bringen, die je nach den Umständen mehr oder weniger brauchbar sind. Es seien x, y und z die Coordinaten des Mittelpunktes von ds, x', y' und z' diejenigen des Mittelpunktes von ds', so erhalten wir die Formeln

$$[17] \quad r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

$$\cos\theta' = \frac{x-x'}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y-y'}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z-z'}{r}\frac{dz'}{ds'},$$

$$\cos\theta = \frac{x-x'}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y-y'}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z-z'}{r}\frac{dz}{ds},$$

$$\cos\varepsilon = \frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'} = -r\frac{d^2r}{ds\cdot ds'} + \frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr'}{ds'},$$

aus welchen, wenn $A = k\cdot B$ gesetzt und der Einfachheit halber der daraus resultirende, allen Formeln gemeinsame Factor A weggelassen wird, sich ergiebt:

$$(3) \qquad d^2E = -\frac{ds\,ds'}{r^n}\left(r\frac{d^2r}{ds\,ds'} + k\frac{dr}{ds}\frac{dr'}{ds'}\right)$$

$$(4) \qquad d^2E = -r^{1-n-k}\frac{d\left(r^k\frac{dr}{ds}\right)}{ds'}ds\,ds'.$$

Endlich folgt vermittels einer von *Plana* in seiner schönen Arbeit über die *Ampère*'sche Theorie angegebenen Transformation:

$$(5) \quad d^2E = ds'\cdot\left\{\begin{aligned} &+\cos\alpha'\left[\frac{dx}{r^n} + (k-1)\frac{(x-x')\,dr}{r^{n+1}}\right] \\ &+\cos\beta'\left[\frac{dy}{r^n} + (k-1)\frac{(y-y')\,dr}{r^{n+1}}\right] \\ &+\cos\gamma'\left[\frac{dz}{r^n} + (k-1)\frac{(z-z')\,dr}{r^{n+1}}\right] \end{aligned}\right\}.$$

Hierin bezeichnen α', β', γ' die Winkel, welche die Richtung des in ds' fliessenden Stromes mit den Coordinatenaxen einschliesst. Falls der Strom seine Richtung änderte und die entgegengesetzte annähme, so wären in der Gleichung (5) die Vorzeichen von dx, dy und dz zu ändern.

Gehen wir zur Bestimmung der Constanten n über.

[18] 12. Zu diesem Zwecke beginnen wir damit, unsere Formeln auf den einfachsten Fall anzuwenden, welchen der Versuch darbieten kann, auf den Fall nämlich, dass die Leiter s und s' längs des Umfanges zweier horizontaler Kreise geführt sind, deren Radien bezw. $= \varrho$ und $= \varrho'$ sind und deren Mittelpunkte auf derselben Normalen zu ihren Ebenen liegen. Wenden wir die Formel (2) an.

Von der Mitte des inducirten Elementes ds' führe man eine Ebene durch den Mittelpunkt des inducirenden Kreises, in welchem sich der Coordinatenanfang befinden soll. Als z-Axe nehmen wir die verticale und als y-Axe den Durchschnitt der erwähnten Ebene mit der Ebene des inducirenden Ringes; α, β, γ bezw. α', β', γ' seien die Winkel, welche zwei zu ds bezw. ds' parallele Gerade mit den positiven Richtungen von x, y und z einschliessen; φ sei der Winkel zwischen den beiden Verticalebenen, welche durch die Mitte je eines der Elemente und die z-Achse gehen. Es ist

$$x' = 0, \quad y' = \varrho', \quad z' = \text{const.},$$

$$x = \varrho \sin\varphi, \quad y = \varrho \cos\varphi, \quad z = 0,$$

$$r^2 = z'^2 + \varrho^2 - 2\varrho\varrho' \cos\varphi + \varrho'^2,$$

$$\cos\alpha = -\cos\varphi, \quad \cos\beta = \sin\varphi, \quad \cos\gamma = 0,$$

$$\cos\varepsilon = -\cos\varphi \cdot \cos\alpha' + \sin\varphi \cdot \cos\beta',$$

$$\cos\theta = \cos\alpha' \cdot \frac{-\varrho\sin\varphi}{r} + \cos\beta' \cdot \frac{\varrho' - \varrho\cos\varphi}{r} + \cos\gamma' \cdot \frac{z'}{r},$$

$$\cos\theta' = -\cos\varphi \cdot \frac{-\varrho\sin\varphi}{r} + \sin\varphi \cdot \frac{\varrho' - \varrho\cos\varphi}{r} = \varrho' \frac{\sin\varphi}{r}.$$

In den vorstehenden Formeln ist vorausgesetzt, dass der Batteriestrom im inducirenden Stromkreise s von dem positiven x zu dem positiven y fliesse, entgegengesetzt der Richtung, in welcher die Bögen φ von den positiven y aus gerechnet werden; die α', β', γ' unterliegen keiner Beschränkung.

Nach Vornahme der entsprechenden Substitutionen ergiebt sich

$$d^2E = \Big[- B\Big(\cos\alpha' \frac{\cos\varphi}{r^n} - \cos\beta' \frac{\sin\varphi}{r^n}\Big)$$

$$+ (A - B)\varrho' \Big\{(\varrho'\cos\beta' + z'\cos\gamma') \frac{\sin\varphi}{r^{n+2}} - \varrho\cos\beta' \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^{n+2}}$$

$$- \varrho\cos\alpha' \frac{\sin^2\varphi}{r^{n+2}}\Big\}\Big] ds\, ds';$$

[19] und da

$$ds = \varrho\, d\varphi\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi \cdot d\varphi}{r^{n+2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{r^{n+2}} = 0\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{r^{n+2}} = \frac{1}{n\varrho\varrho'} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \cdot d\varphi}{r^n}\,,$$

so folgt

$$(6) \quad dE = - \varrho \frac{nB + A - B}{n} \cos\alpha' \cdot ds' \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{r^n}\,.$$

Um den Fall zweier paralleler Kreise zu behandeln, haben wir in der Gleichung (6) $\cos\alpha' = 1$ zu setzen. Machen wir noch der Einfachheit halber $\varrho = \varrho'$ und mithin

$$r^2 = z'^2\Delta^2\,; \quad \Delta^2 = 1 + 2p^2(1 - \cos\varphi)\,; \quad p = \frac{\varrho}{z'}\,,$$

so ergiebt die Integration nach s':

$$E = - 2n \frac{nB + A - B}{n} \frac{\varrho'^2}{z^n} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta^n}\,.$$

In dieser Gleichung lässt sich, wie wir sehen werden, der Werth von n experimentell bestimmen, wenn man dafür sorgt, dass p constant bleibt, weil in diesem Falle das Integral in der Formel (6) einen constanten Werth behält.

Wir müssen demnach experimentell untersuchen, wie sich die Intensität der inducirten Ströme ändert, wenn die Ent-

fernungen z' proportional den Durchmessern ϱ' unserer beiden gleichen Kreise variiren.

13. Ich nahm zwei Holzcylinder und führte um jeden normal zur Axe eine Windung des Drahtes, welcher den inducirten Stromkreis bilden sollte. Um einen dieser Cylinder, welcher mit A bezeichnet werden mag, legte ich ferner auf die gleiche Weise eine einzige Windung des inducirenden Stromkreises, ebenso um den Cylinder B eine einzige Windung desselben Drahtes. Ich traf die Anordnung derart, dass die von den beiden Paaren inducirter und inducirender Ringe inducirten Ströme im Galvanometer einander entgegengesetzt waren. Um nicht gegenseitig auf einander inducirend zu wirken, befanden sich die beiden Cylinder in grossem Abstand von einander; und die Drähte, welche zur Verbindung der beiden inducirten Ringe untereinander und ebenso der inducirenden Ringe untereinander dienten, waren so angeordnet, [20] wie ich schon in § 5 angegeben habe. Im Uebrigen war die Versuchsanordnung die bereits beschriebene.

Die beiden Cylinder A und B hatten nicht den gleichen Durchmesser; vielmehr war der Durchmesser von B doppelt, dreifach so gross u. s. w. wie derjenige von A, je nachdem die Entfernung zwischen seinen beiden Ringen gleichzeitig das Doppelte, Dreifache u. s. w. der Entfernung zwischen den Ringen des Cylinders A — dessen Durchmesser der gleiche blieb — betrug. Auf diese Weise bemerkte ich, dass, wenn die Entfernung zwischen den Ringen unverändert blieb und das Galvanometer keinen Ausschlag geben sollte, gleichzeitig von dem Stromkreis der Batterie zwei, drei Windungen u. s. w. zu dem inducirenden Ringe von A hinzugefügt werden mussten; das heisst, ich musste die inducirende Kraft in dem inducirenden Ringe, welcher beständig in gleicher Entfernung von dem gleichen inducirten Ringe von unveränderlichem Durchmesser blieb, nach einander auf das Doppelte, Dreifache u. s. w. bringen.

Ich stellte den Versuch auch auf folgende Weise an. Ich nahm zwei Cylinder A und B, deren Durchmesser im Verhältniss von 1 : 2 standen. Die Entfernung zwischen den beiden Ringen würde auf A beliebig, auf B doppelt so gross gewählt: ich constatirte dann, dass die Nadel des Galvanometers auf Null blieb, das heisst, dass die inducirten Ströme, welche in entgegengesetztem Sinne flossen, einander gleich waren, wenn die Zahl der Windungen auf dem inducirenden

Cylinder A das Doppelte derjenigen auf dem Cylinder B betrug.

Diese Versuche führen zu dem folgenden experimentellen Satze:

(d) »Die Intensitäten der Ströme, welche im Falle gleicher Grösse des inducirten und des inducirenden Ringes, die einander parallel und mit ihren Mittelpunkten auf der gemeinsamen Normale ihrer Ebenen angeordnet sind, inducirt werden, sind proportional zum Durchmesser der Ringe, wenn die Entfernung zwischen diesen sich proportional zu diesem Durchmesser ändert«.

Wir müssen jedoch darauf aufmerksam machen, dass dieser Satz auch noch bestehen bleibt, wenn die beiden Kreise durch inhaltsgleiche Vielecke, deren Seiten gleich und parallel gelagert sind und deren Mittelpunkte sich auf derselben Normalen ihrer Ebenen befinden, ersetzt werden.

Der Satz (d), zusammen mit der Formel (6), liefert offenbar $n = 1$. Die Formeln (2), (3) und (4) gehen daher in die folgenden über:

$$(2') \qquad d^2E = \frac{ds\,ds'}{r}\{(A - B)\cos\theta\cos\theta' + B\cos\varepsilon\},$$

$$(3') \qquad d^2E = -\frac{d^2r}{ds\,ds'}ds\,ds' - \frac{k}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}ds\,ds',$$

$$(4') \qquad d^2E = -r^{-k}\,d\frac{\left(r^k\frac{dr}{ds}\right)}{ds'}ds\,ds'.$$

[21] Aus der Gleichung (3') ist nun zu ersehen, dass im Falle eines geschlossenen inducirten Stromkreises — und einen anderen Fall können wir nicht erörtern — der Werth des ersten Gliedes auf der rechten Seite an den Grenzen des Integrals gleich Null ist; diese Gleichung lässt sich demnach auch schreiben

$$d^2E = -\frac{k}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}ds\,ds'.$$

Bei geschlossenen Stromkreisen darf man demnach als Ausdruck der elektromotorischen Kraft eine beliebige der folgenden zwei Formeln oder auch ihre Summe nehmen:

$$d^2E = C\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds',$$

$$d^2E = C'\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds'.$$

C und C' sind in diesen Gleichungen Constanten.

Die zweite Formel scheint uns allerdings den Vorzug zu verdienen; das Resultat bleibt jedoch in beiden Fällen das gleiche, weil der Unterschied zwischen beiden Formeln einen Ausdruck darstellt, welcher bei der Integration über einen geschlossenen Stromkreis zu Null wird. Für einen offenen Stromkreis, wo kein Strom vorhanden ist, lässt sich die Frage vorerst noch nicht vollständig durch Bestimmung des Werthes von k entscheiden.

Diese Unbestimmtheit des Werthes von k mag auf den ersten Blick sehr sonderbar erscheinen; man bedenke jedoch, dass diese Bestimmung vollkommen zwecklos wäre, da der einzige dem Experiment zugängliche Fall vorerst derjenige der geschlossenen Ströme ist; wir müssen sogar einer Methode dankbar sein, welche der Gleichung (2′) oder (3′) die volle Allgemeinheit belässt, welche derselben im gegenwärtigen Versuchsstadium zukommt. In einer anderen Arbeit hoffe ich zur vollständigen Beantwortung der Frage geeignete Versuche anstellen zu können; für den Augenblick jedoch dürfen wir die allgemeine Form der Gleichung (3′) nicht aus dem Gedächtniss verlieren; nur um der einfacheren Rechnung willen ist es uns erlaubt, im Falle geschlossener Ströme einen Theil dieser Gleichung zu vernachlässigen oder, wenn man will, der Constanten k einen speciellen Werth zu geben und damit eine der beiden letzten obigen Formeln zu acceptiren.

Alles dies erklärt, wie die Herren *Weber* und *Neumann*, trotzdem sie von gänzlich verschiedenen hypothetischen Grundlagen ausgehen, doch im Falle der geschlossenen Ströme schliesslich zu Integralen von derselben Form gelangen können, die in ihren Ergebnissen mit der vorliegenden Theorie, das heisst mit den Versuchen, übereinstimmen, während im allgemeinen Falle ihre Formeln durchaus von einander abweichen und auch mit der vorliegenden keine Aehnlichkeit besitzen. In der That wäre es jetzt ein Leichtes, Hypothesen zu ersinnen, welche [22] zur Formel (3′) führen könnten, oder zu einem speciellen Fall derselben für einen beliebigen nur

von Null verschiedenen Werth von k. Schwierig wäre nur die Aufstellung einer einfachen, klaren Hypothese, welche diese Formel lediglich von den einfachen und bekannten Naturgesetzen abhängig machte. Und diese Schwierigkeit ist bis jetzt auch für die *Ampère*'sche Formel unüberwindlich geblieben. Ich muss hinzufügen, dass die in der erwähnten Arbeit von Herrn *Weber* aufgestellte ungemein geistreiche Hypothese dazu geeignet ist, die Erscheinungen der Induction und der elektrodynamischen Anziehung auf elegante Weise von einem gemeinsamen Gesichtspunkte aus zu umfassen; man muss jedoch mit *Weber* für die Anziehungs- und Abstossungskräfte der elektrischen Fluida in den Volta-Stromkreisen so complicirte Gesetze annehmen, dass deren Erklärung sicher keine geringere Schwierigkeit bieten würde als diejenige, welche man bei Erklärung der Formel selbst, welche ein Versuchsergebniss darstellt, zu überwinden hätte.

Im Falle der Induction bei relativer Bewegung eines geschlossenen Stromkreises ist d^2E als Function der Zeit t zu betrachten; und gemäss dem Theorem (b) stellt die Ableitung nach jener Variablen den Ausdruck der elementaren elektromotorischen Kraft für die Untersuchung der Erscheinungen von der Classe (B) dar. Fürs erste jedoch behandeln wir das Problem in der Weise, dass es überflüssig wäre, die Analyse durch diese Ableitung zu compliciren. Immerhin scheint es zweckmässig, darauf aufmerksam zu machen, dass die durch Aenderung der relativen Lage der beiden Elemente ds und ds' erzeugte Kraft d^2E, wenn nur r in Betracht gezogen wird, in umgekehrtem Verhältnisse des Quadrates dieser Variablen abnimmt und somit einem der allgemeinsten Naturgesetze unterliegt.

14. Aus der Gleichung (6) ist ferner zu entnehmen, dass die elektromotorische Kraft, die beim Stromschluss von einem Stromkreise vom Radius ϱ in einem Elemente ds' inducirt wird, welches mit der Normalen zu der zu dem Stromkreise normalen und durch dessen Mittelpunkt und denjenigen von ds' gehenden Ebene einen Winkel α' einschliesst, durch die Formel

$$(7) \qquad dE = -\varrho A \cos\alpha' ds' \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{r}$$

gegeben ist, welche sich leicht auf elliptische Functionen zurückführen lässt.

Ist ϱ' die Entfernung des Elementes ds' von der Axe, welche durch den Mittelpunkt des Kreisstromes geht und normal zu dessen Ebene gerichtet ist, so ist, wie wir bereits sahen,

$$r^2 = z'^2 + \varrho^2 - 2\varrho\varrho' \cos\varphi + \varrho'^2 .$$

z' bezeichnet die Entfernung zwischen ds' und der Ebene des Stromes. Ist der Radius ϱ sehr klein, so lässt sich die Formel (7) annäherungsweise durch die folgende ersetzen

$$(8) \qquad dE = -A\pi \cos\alpha' \frac{\varrho^2\varrho'}{(z'^2 + \varrho'^2)^{3/2}} ds' ,$$

[23] welche uns bald von Nutzen sein wird. Die Formel (8) lässt sich sehr leicht auf den Fall der von einem Magnetstab auf eine cylindrische Spirale ausgeübten Induction anwenden, die Formel (7) dagegen auf den Fall zweier ebener und paralleler Spiralen, deren Mittelpunkte sich auf der gemeinsamen Normalen ihrer Ebenen befinden. Solche Anwendungen werden demjenigen von Nutzen sein, der sich mit der numerischen Bestätigung dieser Theorie beschäftigen will. Ich fürchte nicht, dass die Formeln, welche in dieser Arbeit mitgetheilt sind, oder aus denselben abgeleitet werden können, etwa nicht mit den Versuchen übereinstimmen, falls sie in den verschiedenen Einzelfällen auf Zahlen zurückgeführt werden; aber ich suche keine Stütze in derartigen Bestätigungen, weil ich weiss, dass man in vielen Einzelfällen oft zu denselben Formeln gelangt, auch wenn man von vollständig verschiedenen Theorien ausgegangen ist, und weil auch von einander abweichende Formeln innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Fehler und des Versuchsgebietes gleiche Zahlenwerthe liefern. Wer die vorliegende Theorie discutiren will, hat hauptsächlich die Fundamentalversuche zu prüfen.

15. Betrachten wir den Fall zweier geradliniger, parallel oder normal zu einander gerichteter Leiter. Greifen wir zur Formel (3'), die, wie wir sahen, in die Gestalt

$$d^2E = k \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r} ds \cdot ds'$$

gebracht werden kann. Setzen wir zunächst voraus, die Leiter seien zu einander parallel; um die Vorzeichen von $\cos\theta$

und $\cos\theta'$ festzusetzen, wollen wir ferner annehmen, beide Leiter seien im gleichen Sinne von einem Strome durchflossen. Ihre Lage sei horizontal und der Coordinatenanfang befinde sich am Ende eines derselben; die z-Axe sei vertical, und die x-Axe parallel zu den Leitern gerichtet. Danach können wir schreiben

$$r^2 = (x'-x)^2 + y'^2 + z'^2; \quad \cos\theta = \frac{x'-x}{r} = \cos\theta'$$

$$d^2E = k\frac{(x'-x)^2}{r^3}\,dx\,dx'.$$

Es ist nun folgender Ausdruck zu berechnen:

$$\int\frac{(x'-x)^2}{r^3}\,dx' = -\frac{x'-x}{\sqrt{(x'-x)^2+y'^2+z'^2}} + \log\left(x'-x+\sqrt{(x'-x)^2+y'^2+z'^2}\right).$$

Sind a und b die Theile, in welche einer der Leiter durch die vom Ende des anderen Leiters ausgehende yz-Ebene zerlegt wird, so ist

[24] $$\int_{-b}^{a}\frac{(x'-x)^2}{r^3}\,dx' = -\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y'^2+z'^2}} + \log\left(a-x+\sqrt{(a-x)^2+y'^2+z'^2}\right) + \frac{-b-x}{\sqrt{(b+x)^2+y'^2+z'^2}} - \log\left(-b-x+\sqrt{(b+x)^2+y'^2+z'^2}\right)$$

und somit

$$\iint_{-b}^{a}\frac{(x'-x)^2}{r^3}\,dx\cdot dx' = 2\sqrt{(a-x)^2+y'^2+z'^2} - (a-x)\log\left(a-x+\sqrt{(a-x)^2+y'^2+z'^2}\right) - 2\sqrt{(b+x)^2+y'^2+z'^2} - (b+x)\log\left(b-x+\sqrt{(b+x)^2+y'^2+z'^2}\right),$$

wobei diese letztere Integration von $x = 0$ bis $x =$ der Länge des Leiters zu erstrecken ist. Diese Formel gilt für den Strom, welchen ein geradliniger von einem Batteriestrom durchflossener Leiter beim Unterbrechen oder Schliessen des Stromes in einem zu ihm parallelen Leiter inducirt.

Behalten wir dasselbe Coordinatensystem bei und betrachten wir zwei geradlinige Leiter, von welchen der eine in der x-Axe und mit dem einen Ende am Coordinatenursprung liegt, der andere parallel zur y-Axe, also normal zum vorigen, gerichtet ist. Wir können schreiben

$$r^2 = (a-x)^2 + y'^2 + z'^2; \quad \cos\theta = \frac{a-x}{r}; \quad \cos\theta' = \frac{y'}{r}$$

$$d^2E = k\,\frac{a-x}{r^3}\,y'\,dy'\,dx\,,$$

und es ergiebt sich, wenn a und b die Theile sind, in welche der erste Leiter durch die den zweiten Leiter enthaltende und zur yz-Ebene parallele Ebene zerlegt wird,

$$\int_0^{a+b}\!\!\int \frac{(a-x)y'}{r^3}\,dy'\,dx = \sqrt{b^2+y'^2+z'^2} - \sqrt{a^2+y'^2+z'^2}$$

wobei das unbestimmte Integral von $y' = 0$ bis $y' =$ der Länge des zweiten Leiters zu erstrecken ist.

[25] Die vorstehenden Formeln lassen sich leicht auf den Fall anwenden, dass der inducirende und der inducirte Leiter um den Umfang zweier paralleler Rechtecke gelegt sind, und mithin auch auf den Fall, dass die beiden Stromkreise ebene Spiralen bilden, welche die Flächen jener Vierecke einnehmen.

16. Ein beliebiger geschlossener Stromkreis lässt sich als die Grenzcurve einer Fläche betrachten; und denkt man sich diese Fläche durch zwei zu einander normale Schaaren von Ebenen, die in gleichen, unendlich kleinen Abständen parallel auf einander folgen, durchschnitten, so lässt sich die Wirkung des besagten Stromkreises durch diejenige der sämmtlichen kleinen Elementarvierecke ersetzen, in welche die Fläche durch jene Ebenen zerlegt ist. Ist dieser Stromkreis der inducirende, so hat man sich all diese Vierecke von ebensovielen Strömen, und zwar sämmtlich in gleichem Sinne, umflossen zu denken; die Aussenwirkungen der innerhalb der Fläche gelegenen Seiten der Vierecke vernichten sich dann gegenseitig und es bleiben nur diejenigen der Seiten, welche den Umfang der Fläche, das heisst den inducirenden Stromkreis bilden. Ist der Stromkreis dagegen der inducirte, so verbleiben in der Summe der auf sämmtlichen Seiten der Vierecke inducirten elektromotorischen Kräfte ebenfalls nur diejenigen der Seiten,

welche den inducirten Stromkreis bilden. Dieser Kunstgriff in der Betrachtung der Wirkung eines Stromkreises nach aussen wurde zuerst von *Ampère* angewendet.

Bei der elektromagnetischen Induction kann es von Nutzen sein, eine Formel zu kennen, welche wir jetzt entwickeln werden und welche die bei momentaner Magnetisirung von einem magnetischen Element in einem jener Vierecke inducirte elektromotorische Kraft ausdrückt — das heisst die elektromotorische Kraft, welche durch die Schliessung eines im Vergleich zu seiner Entfernung vom inducirten Leiter unendlich kleinen Kreisstromes in einem längs des Umfanges eines ebenfalls unendlich kleinen Vierecks gelegten Leiter inducirt wird.

Bezeichnet ϱ den Radius des Kreisstromes, welcher das magnetische Element repräsentirt, ϱ' den Abstand des inducirten Elementes ds' von der im Mittelpunkte desselben zu seiner Ebene normalen Axe, α' den Winkel zwischen ds' und der Normalen zu der Ebene, welche durch die Mitte von ds' und ebenso durch diejenige des Kreisstromes geht und zu dessen Ebene normal gerichtet ist; bezeichnet ferner r_1 die Entfernung zwischen dem Mittelpunkte des magnetischen Elementes und demjenigen des inducirten Elementes ds', so ist, wie wir sahen, die elektromotorische Kraft nach Gleichung (8)

$$dE = -A\pi\varrho^2 \frac{\varrho' \cos\alpha'}{r_1^3} \cdot ds' .$$

Bedienen wir uns rechtwinkliger Coordinaten mit dem Ursprung im Mittelpunkte des Kreisstromes; die xy-Ebene sei diejenige des Kreisstromes, es seien xyz die Coordinaten des Mittelpunktes des Vierecks, ferner

[26] $$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und 2Δ und $2\Delta'$ die Längen seiner Seiten; abc resp. $a'b'c'$ seien die Cosinus der Winkel zwischen den durch den Coordinatenanfang parallel zu 2Δ und $2\Delta'$ gelegten Geraden und den positiven Richtungen der xyz.

Die Entfernungen $r_1 r_2 r_1' r_2'$ zwischen dem Cordinatenanfang und den Mittelpunkten der vier Seiten des Vierecks lassen sich durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
r_1^2 &= (x + \Delta' a')^2 + (y + \Delta' b')^2 + (z + \Delta' c')^2 , \\
r_2^2 &= (x - \Delta' a')^2 + (y - \Delta' b')^2 + (z - \Delta' c')^2 , \\
r_1'^2 &= (x + \Delta a)^2 + (y + \Delta b)^2 + (z + \Delta c)^2 , \\
r_2'^2 &= (x - \Delta a)^2 + (y - \Delta b)^2 + (z - \Delta c)^2
\end{aligned}$$

ausdrücken; ebenso sind die Entfernungen $\varrho_1\varrho_2\varrho_1'\varrho_2'$ dieser vier Punkte von der z-Axe

$$\begin{aligned}\varrho_1^2 &= (x+\Delta' a')^2+(y+\Delta' b')^2,\\ \varrho_2^2 &= (x-\Delta' a')^2+(y-\Delta' b')^2,\\ \varrho_1'^2 &= (x+\Delta a)^2+(y+\Delta b)^2,\\ \varrho_2'^2 &= (x-\Delta a)^2+(y-\Delta b)^2;\end{aligned}$$

und die Cosinus der Winkel, welche die Normalen zu $\varrho_1\varrho_2$ $\varrho_1'\varrho_2'$ und der z-Axe mit den positiven Richtungen der x- und y-Axe einschliessen, sind

$$\begin{array}{cc}\dfrac{y+\Delta' b'}{\varrho_1}, & -\dfrac{x+\Delta' a'}{\varrho_1}\\ \dfrac{y-\Delta' b'}{\varrho_2}, & -\dfrac{x-\Delta' b'}{\varrho_2}\\ \dfrac{y+\Delta b}{\varrho_1'}, & -\dfrac{x+\Delta a}{\varrho_1'}\\ \dfrac{y-\Delta b}{\varrho_2'}, & -\dfrac{x-\Delta a}{\varrho_2'}.\end{array}$$

[27] Man beachte nun, dass die Cosinus der Winkel, welche die Richtung des in einer Seite 2Δ fliessenden Stromes mit den positiven Richtungen von xyz einschliesst, durch

$$a,\quad b,\quad c,$$

ausgedrückt werden können und dass somit die Richtungscosinus des Stromes, welcher in der zu jener parallelen Seite fliesst, durch

$$-a,\quad -b,\quad -c$$

ausgedrückt sind. Da ferner der Strom, welcher die eine Seite von der Länge 2Δ, z. B. die vom Coordinatenanfang entferntere, durchfliesst, durch diejenige Seite $2\Delta'$ zurückkehren muss, welche von den beiden die Länge $2\Delta'$ besitzenden Seiten die vom Ursprung weiter entfernte ist, so ergiebt sich, dass die Richtungscosinus des Stromes, welcher die bezeichnete Seite von der Länge $2\Delta'$ und die zu ihr parallele durchfliesst, bezw. gegeben sind durch

$$\begin{aligned}&-a',\quad -b',\quad -c',\\ &a',\quad b',\quad c';\end{aligned}$$

und die Cosinus der Winkel $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1' \alpha_2'$, welche von den erwähnten Normalen zu $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_1' \varrho_2'$ und den vier Seiten des Vierecks eingeschlossen werden, liefern die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varrho_1 \cos \alpha_1 &= (y + \Delta b')a - (x + \Delta a')b, \\
\varrho_2 \cos \alpha_2 &= -(y - \Delta b')a + (x - \Delta a')b, \\
\varrho_1' \cos \alpha_1' &= -(y + \Delta a)a' + (x + \Delta b)b', \\
\varrho_2' \cos \alpha_2' &= (y - \Delta a)a' + (x - \Delta b)b'.
\end{aligned}$$

Angenähert ist ferner

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_1^3} &= \frac{1}{r^3} + \frac{3\Delta'}{r^5}(xa' + yb' + zc'), \\
\frac{1}{r_2^3} &= \frac{1}{r^3} - \frac{3\Delta'}{r^5}(xa' + yb' + zc'), \\
\frac{1}{r_1'^3} &= \frac{1}{r^3} + \frac{3\Delta}{r^5}(xa + yb + zc), \\
\frac{1}{r_2'^3} &= \frac{1}{r^3} - \frac{3\Delta}{r^5}(xa + yb + zc).
\end{aligned}$$

[28] Die Ausdrücke

$$2\Delta \cdot \frac{\varrho_1 \cos \alpha_1}{r_1^3}, \quad 2\Delta \cdot \frac{\varrho_2 \cos \alpha_2}{r_2^3}, \quad 2\Delta' \cdot \frac{\varrho_1' \cos \alpha_1'}{r_1'^3}, \quad 2\Delta' \cdot \frac{\varrho_2' \cos \alpha_2'}{r_2'^3}$$

lassen sich nunmehr leicht aufstellen; man gelangt, unter Vernachlässigung der dritten Potenzen von Δ und Δ', zu folgenden Formeln:

$$+2\Delta \left\{ \frac{(y + \Delta' b')a - (x + \Delta' a')b}{r^3} - \frac{3\Delta'(ay - bx)}{r^5}(xa' + yb' + zc') \right\},$$

$$-2\Delta \left\{ \frac{(y - \Delta' b')a - (x - \Delta' a')b}{r^3} + \frac{3\Delta'(ay - bx)}{r^5}(xa' + yb' + zc') \right\},$$

$$-2\Delta' \left\{ \frac{(y + \Delta b)a' - (x + \Delta a)b'}{r^3} - \frac{3\Delta(a'y - b'x)}{r^5}(xa + yb + zc) \right\},$$

$$+2\Delta' \left\{ \frac{(y - \Delta b)a' - (x - \Delta a)b'}{r^3} + \frac{3\Delta(a'y - b'x)}{r^5}(xa + yb + zc) \right\},$$

durch deren Summirung — unter Berücksichtigung von $r^2 - z^2 = x^2 + y^2$ — sich ergiebt

$$-2^2 \Delta\Delta' \left[\frac{(ab'-ba')}{r^3} - \frac{3z}{r^4}\left\{(ab'-ba')\frac{z}{r} + (ca'-ac')\frac{y}{r} + (bc'-cb')\frac{x}{r}\right\}\right].$$

Stellt nun

$$Ax + By + Cz = 0$$

die Gleichung der zum Viereck parallelen und durch den Coordinatenanfang gehenden Ebene dar, so ist, wenn N die Normale zu dieser Ebene bezeichnet,

$$A = \cos(N, x) = bc' - cb',$$
$$B = \cos(N, y) = ca' - ac',$$
$$C = \cos(N, z) = ab' - ba',$$

wobei

$$aa' + bb' + cc' = 0$$
$$A^2 + B^2 + C^2 = 1.$$

[29] Berücksichtigen wir noch, dass z' die Normale — die wir mit N' bezeichnen wollen — zur Ebene des Kreisstromes darstellt, so erhalten wir die Gleichung

$$(9) \quad -d^2M = A\frac{d\omega . d\omega'}{r^3}\{\cos(N,N') - 3\cos(N,r).\cos(N',r)\},$$

in welcher d^2M die gesuchte elektromotorische Kraft ist. In der Gleichung (8) ist dabei an Stelle von $\pi\varrho^2$ das Element $d\omega$ gesetzt, eines von denjenigen, in welche wir uns die von dem gesammten Stromkreise umschlossene Fläche zerlegt denken; ebenso $d\omega'$ an Stelle von $4\Delta\Delta'$, der Fläche des elementaren Vierecks.

17. Die Gleichung (9) hat dieselbe Form wie Gleichung (2) und hätte mithin durch die nämlichen allgemeinen Betrachtungen gewonnen werden können, welche zur Aufstellung der Gleichung (2) geführt hatten — oder genauer gesagt, dieselbe bedingt ein Theorem, welches dem in § 9 mit (*c*) bezeichneten analog ist. Es ist also, wenn man die durch einen bewegten Magnet erzeugten Ströme der Rechnung unterziehen will, betreffs der Gleichung (9) dasjenige zu wiederholen, was in § 13 bezüglich d^2E gesagt wurde.

Eine leichte und bereits bei einer anderen Gelegenheit angedeutete Transformation der Gleichung (9) ergiebt, wenn ds und ds' zwei normal durch die Mittelpunkte der Flächenelemente $d\omega$ und $d\omega'$ gehende geradlinige Elemente bezeichnen

$$d^2M = A^1 \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds \, . \, ds'} d\omega \, . \, d\omega' \, .$$

Um also den Fall der Induction zwischen zwei Solenoiden oder elektrodynamischen Cylindern mit den constanten Querschnitten $d\omega$ und $d\omega'$, deren Leitcurven s und s' seien, zu behandeln, kann man, wenn C eine dem Produkt der besagten Querschnitte sowie der elektromotorischen Kraft der Batterie u. s. w. proportionale Constante bezeichnet, als Elementarformel die folgende Gleichung

$$d^2M = C \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds \, . \, ds'} ds \, . \, ds' \tag{10}$$

in Anwendung bringen; dieselbe schliesst zugleich die folgenden Theoreme ein, welche in der *Ampère*'schen Theorie ihre Analoga finden:

»Die durch einen elektrodynamischen Cylinder oder durch einen Magnet von constantem Querschnitt in einen geschlossenen Kreis inducirte elektromotorische Kraft ist nicht von der Form des Cylinders oder des Magnets, sondern nur von der Lage seiner Enden abhängig.«

[30] »Bildet der elektrodynamische Cylinder oder der Magnet eine geschlossene Curve, so vermag derselbe im Allgemeinen gar keinen Strom zu induciren.«

Es mag indessen daran erinnert werden, dass die Gleichung (9) voraussetzt, dass die Flächen, als deren Elemente $d\omega$ und $d\omega'$ erscheinen, weder in derselben Ebene liegen, noch übereinander gelagert sein dürfen, und dass deshalb die beiden mitgetheilten Theoreme derselben Bedingung unterliegen.

18. Wir haben nunmehr die Fundamentalformeln entwickelt, vermittels deren die Aufgabe, die Kraft der inducirten Ströme zu finden, wenn die relative Lage und Gestalt beliebiger inducirender und inducirter Stromkreise gegeben ist, auf ein einfaches Problem mathematischer Analyse zurück-

geführt wird. Diese Formeln haben als die kürzeste und klarste algebraische Darstellung der Thatsachen zu gelten; als Grundlagen, von welchen aus man zur Auffindung der Ursache der Erscheinungen gelangen kann, welche im Allgemeinen aus der Wechselwirkung zweier Volta-Stromkreise oder Magnete oder der Körper im natürlichen Zustande hervorgehen.

In dieser Theorie sind jedoch diejenigen Erscheinungen unerwähnt gelassen, bei welchen die Zeit mit in Betracht zu ziehen ist, die von der inducirten Materie von dem ersten Augenblick an, in dem die Einwirkung der inducirenden Kraft auf dieselbe begonnen hat, zur Ausbildung des Stromes beansprucht wird. Die inducirende Wirkung erfolgt nicht augenblicklich; welches auch immer der (elektrotonische) Zustand sein möge, der durch die inducirende Wirkung auf den inducirten Stromkreis bei der Stromerzeugung geweckt wird, so dauert derselbe doch, auch wenn der inducirte Stromkreis geöffnet bleibt, eine sehr wohl merkliche, wenngleich kurze Zeit an. Der Versuch zeigt in der That, dass man einen inducirten Strom noch erhalten kann, wenn man den inducirten Stromkreis erst schliesst, nachdem der inducirende bereits geschlossen ist; derselbe lehrt ferner, dass die Zeit, die zur Zerlegung der natürlichen Elektricität im inducirten Stromkreise und zur Erzeugung des inducirten Stromes bei der Schliessung des Volta-Stromkreises erforderlich ist, verschieden ist von der Zeit, welche der Strom bei der Unterbrechung desselben Stromkreises beansprucht; oder, wie wir auch sagen können, von der Zeit, welche die Elektricität zur Wiedervereinigung in den natürlichen Zustand bedarf: diese Thatsache wird durch einige Versuche der Herren *Abria* und *Poggendorff* bewiesen. Diese Zeitunterschiede hat man sich bei der Erklärung des Rotationsmagnetismus gegenwärtig zu halten.

Einstweilen wird es den experimentirenden Physikern von Nutzen sein, dass sie bei ihren Versuchen die Erscheinungen der elektrodynamischen Induction mit voller mathematischer Strenge und ohne die geringste Hypothese zu berechnen im Stande sind.

Ueber die mathematische Theorie der elektrodynamischen Induction.

von

Riccardo Felici[1]).

Zweite Abhandlung.

19.[2]) In einer ersten, im vorliegenden Bd. III der Annalen p. 1—30 veröffentlichten Abhandlung haben wir auf Grund von Versuchsergebnissen Folgendes entwickelt:

1) Die Theorie der Ströme, welche in einem linearen Leiter beim Beginn oder Aufhören des Stromes in einem Volta-Stromkreise inducirt werden;

2) Wie sich aus jener Theorie diejenige der durch relative Bewegung des inducirenden und inducirten Stromkreises inducirten Ströme ableiten lässt.

Ohne die Einhaltung eines derartigen Weges, welcher von dem ersten jener Fälle zu dem zweiten führt, würde es sehr schwierig, wenn nicht unmöglich gewesen sein, die von *Ampère* in seiner Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen gewählte Methode unter Ausschluss jeder hypothetischen Grundlage auf die durch relative Bewegung zweier Stromkreise inducirten Ströme anzuwenden: und wir hatten uns vorgesetzt, jegliche Hypothese aus einer Arbeit auszuschliessen, deren Durchführung, wie es bei unserer Arbeit der Fall, unbeschadet der Vorzüge der bereits vorhandenen, aber auf hypothetischer Grundlage aufgebauten anderen Theorien zweckmässig erschien.

---

[1]) Aus den »Annali della Università Toscana« t. III, 2. Theil. Pisa 1854.

[2]) Die Numerirung der Paragraphen bildet die Fortsetzung derjenigen der ersten Abhandlung.

Andererseits gehen jene Theorien der Herren *Neumann* und *Weber*, obschon sie nach Ausführung der Integrationen in zahlreichen Fällen die gleichen Resultate geben[1]), immerhin von Principien aus, [100] welche zwar viel Gemeinsames haben[2]), aber doch wesentlich von einander verschieden sind, und sie weichen darum auch jedesmal dann von einander ab, wenn man die Induction im allgemeinen Falle betrachten will. Es war darum wünschenswerth, zu wissen, woran man sich zu halten habe, um, wenn auch nicht gerade absolut allgemeine, so doch sichere theoretische Ergebnisse zu erlangen. Welche Ansicht auch einige Physiker betreffs der hier erörterten Frage haben mögen, so müssen sie doch schliesslich ein Verfahren, welches allein unserer Wissenschaft geziemt, gutheissen und annehmen; denn diese Wissenschaft hat sich vor allem mit den Thatsachen und mit deren einfacher und strenger Erörterung zu beschäftigen.

Prof. *Matteucci* hat letzthin in seinem schönen »Cours spécial sur l'induction, le magnétisme de rotation etc.« [Paris, *Mallet-Bachelier*, 1854, in 8°] auch seine sämmtlichen Untersuchungen über die Induction vereinigt; und die Lectüre derselben war es, welche in mir den Wunsch entstehen liess, meine erste Abhandlung in der vorliegenden fortzusetzen. In der Arbeit von Prof. *Matteucci* findet man alles, was heute den experimentellen Theil der Induction bildet, ausführlich dargelegt. Aber unter der grossen Zahl der Erscheinungen, welche diesem Zweige der Physik angehören, kann ich offenbar nur diejenigen behandeln, welche sich mittelst elektrodynamischer Wirkungen zwischen inducirten und inducirenden Körpern kundgeben und experimentell behandeln lassen.

So werden wir uns für jetzt bei den zu behandelnden speciellen Fällen auf die Untersuchung beschränken, ob die Richtung und die Form der von den inducirten Strömen durch-

---

[1]) Obschon jeder Strom, mag es nun ein inducirter oder ein inducirender sein, immer in einem geschlossenen Stromkreise verläuft, so bieten sich doch die Fälle der Induction zwischen offenen Stromkreisen leicht bei der Rechnung und beim Versuche dar. Nicht etwa als ob die Ströme in offenen Stromkreisen circulirten, sondern die Theile der Stromkreise, von welchen oder in welchen die elektromotorische Kraft inducirt wird, bilden bisweilen Curven, deren Enden beträchtlich weit von einander entfernt sind, während es unmöglich sein kann, die Betrachtung eines solchen offenen Stromkreises durch diejenige eines geschlossenen zu ersetzen.

[2]) Die *Ampère*'sche Formel.

laufenen Curven eine derartige ist, dass sie zu dem, was wir von jenen elektrodynamischen Wirkungen wissen, Veranlassung geben mag.

20. In dieser zweiten Abhandlung werden wir

1. experimentell nachweisen, dass die in der ersten Abhandlung dargelegte Theorie auf den Fall der durch die Entladungen der Leydner Flasche inducirten Entladungen (oder momentanen Ströme) anzuwenden ist;
2. werden wir zeigen, dass man, ausgehend von der Theorie *Ohm*'s betreffs der Vertheilung der Volta-Ströme in den Leitern und von der Theorie der Induction, die Curven berechnen kann, längs deren sich die in Körpern von beliebiger Gestalt inducirten Ströme ausbreiten. Und dies wird von Nutzen sein, sowohl weil die linearen Stromkreise einen zu speciellen Fall der Induction darstellen, in welchem man nicht nöthig hat, die Form der inducirten Ströme zu berechnen, als auch weil wir dadurch ein Mittel erlangen werden, um das schon in der ersten Abhandlung Bewiesene analytisch zu ergänzen oder zu erweitern, und endlich weil sich dadurch die Möglichkeit bietet, unsere Theorie der Induction mit den Versuchsergebnissen zu vergleichen;
3. werden wir die Behandlung dieses Zweiges der Wissenschaft seitens einiger Physiker, welche gleichzeitig die Theorien von *Neumann* und von *Weber*, sowie das bekannte *Lenz*'sche Gesetz heranziehen, besprechen und dabei die Gründe darlegen, [**101**] welche es uns für jetzt unmöglich machen, jene Theorien als den Ausdruck der Thatsachen anzunehmen.

Wir werden immer darauf achten, in der Allgemeinheit der Erscheinungen das Gebiet derjenigen, deren Theorie, weil durch den Versuch gegeben, klar und wohlbegründet ist und bleiben wird, streng von dem Gebiet der Erscheinungen zu trennen, bezüglich deren das Experiment weder direct eine Theorie ergeben, noch auch die Annahme irgend einer Hypothese gestattet hat.

Wir machen darauf aufmerksam, dass das Verständniss dieser Abhandlung das Studium der ersten voraussetzt und dass hier wie dort das Problem nur im unmittelbaren Hinblick auf einen bestimmten und dem Versuch zugänglichen Specialfall behandelt werden wird. Es ist hier nicht der Ort für

mathematisch-analytische Entwicklungen, die ausserhalb einer möglichen Prüfung durch das Experiment stehen.

21. Die elektromotorische Kraft, welche in einem Elemente ds' eines Stromkreises in der Richtung des Elementes durch ein Element ds eines inducirenden Stromkreises bei Unterbrechung oder Schliessung dieses letzteren inducirt wird, ist, wie wir in § 13 Gleichung (3′) sahen,

$$d^2E = -\frac{d^2r}{ds\,ds'}\,ds\,ds' - \frac{k}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds'.$$

Zur Bestimmung der Gleichung (3′) dienten uns die Sätze (*c*) und (*d*). Der erstere derselben, (*c*), welcher den aus *Ampère*'s Theorie bekannten Fall des wellenförmig gebogenen Leiters auf den Fall der Induction ausdehnt, giebt der analytischen Function, welche den Werth von d^2E auszudrücken vermag, die allgemeinste Form, deren dieselbe fähig ist; der zweite Satz, (*d*), liefert das Gesetz, nach welchem die elektromotorische Kraft d^2E bei Aenderung der Entfernung r zwischen den beiden Elementen ds und ds' variirt.

Um zu wissen, ob die Gleichung (3′) auch dann noch anwendbar ist, wenn die Batterie und die Unterbrechungen des Volta-Stromkreises durch die Entladungen einer Leydner Flasche ersetzt sind, brauchen wir sonach nur zu untersuchen, ob die beiden Sätze (*c*) und (*d*) auch in diesem Falle gelten; diese Untersuchung habe ich vorgenommen und in den von *Regnault*, *Dumas* etc. herausgegebenen Annales de Physique et de Chimie, sowie in den von Prof. *B. Tortolini* in Rom publicirten Annali di Fisica e Matematica mitgetheilt. Hier werden wir jetzt die zu diesem Zwecke unternommenen Versuche, sowie die zur Vermeidung der bei solchen Versuchen häufigen Irrthümer zu beobachtenden Vorsichtsmaassregeln hinreichend ausführlich beschreiben.

Wir stellten also fest, dass die Intensität der Ströme, welche im Falle zweier gleicher paralleler Ringe, eines inducirenden und eines inducirten, deren Mittelpunkte sich auf der [102] gemeinsamen Normalen ihrer Ebenen befinden, inducirt werden, proportional zum Durchmesser der Ringe variirt, falls die Entfernung zwischen denselben sich ebenfalls proportional zu diesem Durchmesser ändert.

Wie bereits bemerkt worden, gilt dieser Satz auch im Falle zweier gleicher Vielecke, deren Seiten gleich und zu einander parallel und deren Mittelpunkte auf derselben Normalen ihrer

Ebenen gelegen sind; und da in diesem Falle die experimentelle Prüfung weniger den Fehlern ausgesetzt ist, welche bei Verwendung der Leydner Flasche von einer unvollkommenen Isolirung der Leiter herrühren könnten, so ziehen wir es vor, den mit zwei Quadraten anstatt mit zwei Ringen angestellten Versuch zu beschreiben. Die Versuchsanordnung bleibt übrigens in beiden Fällen die gleiche.

22. Durch Verbindung von zwölf etwa 2 cm breiten Holzleisten stellte ich die zwölf Seiten eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit quadratischer Basis und ungefähr 40 cm Höhe her. Dasselbe diente als Rahmen, auf welchen die Leitungsdrähte gewickelt werden sollten; deshalb wurden die vier Seiten oder Leisten desselben, welche die Höhe bildeten, mit einem Isolator, nämlich einer Schicht Siegellack, überzogen.

Darauf nahm ich einen Kupferdraht, der ganz aus einem Stück bestand, das heisst der nicht aus verschiedenen an den Enden zusammengelötheten oder zusammengedrehten Theilen hergestellt war. Dieser Draht wurde in einem Sinne einmal um das Parallelepiped gelegt, sodass ein Rechteck mit geradlinigen Seiten zu Stande kam; darauf wurde derselbe Draht 20 cm weit nach unten und dann in entgegengesetzter Richtung wie vorher um das Parallelepiped geführt, wobei jedoch die Seiten des Rechteckes eine schlangen- oder wellenähnliche Gestalt erhielten. Eines der Enden dieses Drahtes stand mit der inneren, das andere mit der äusseren Belegung einer Batterie in Verbindung, die aus höchstens sechs Leydner Flaschen bestand, deren Belegungen je 11,5 cm Durchmesser und 17,0 cm Höhe besassen.

Diese zwei Windungen stellten zwei in jeder Beziehung vollkommen gleiche inducirende Stromkreise dar.

Wenn der erwähnte Draht nur dazu diente, die beiden inducirenden Stromkreise mit einander und mit der Batterie in Verbindung zu setzen, so wurden seine beiden Theile in gerader Linie und zwar in etwa 1 cm Abstand von einander parallel zu einander ausgespannt; dies geschah mit Hilfe von Siegellackstückchen, die jedoch in so geringer Zahl als möglich verwendet wurden. Diese Vorsicht war nothwendig, damit die Fernwirkung des Drahtes, welcher nicht zu den beiden inducirenden Stromkreisen gehörte, nicht berücksichtigt zu werden brauchte, während es hier nicht möglich war, die erwähnten Drahtstücke wie beim Versuch mit den Volta-Strömen zusammen zu winden.

Zwischen jenen beiden Rechtecken und in gleichem Abstand von denselben stellte ich ein drittes Rechteck, welches den inducirten Stromkreis bilden sollte, ebenfalls aus einem Stücke her; auch hier wurden die gleichen Vorsichtsmaassregeln wie bei den ersten Rechtecken getroffen. [**103**] Die Enden dieses zweiten Drahtes führten in einem gewissen Abstande von dem Apparate zu den Enden einer kleinen Spirale. Diese Spirale war durch Aufwickelung eines mit Seide umsponnenen Kupferdrahtes auf ein dickwandiges Glasrohr hergestellt und obendrein mit einer dicken Schicht eines isolirenden Firnisses, der den Zwischenraum zwischen den einzelnen Windungen der Spirale ausfüllte, überzogen worden. Die Länge der Spirale betrug 5,0, ihr Durchmesser 0,5 cm.

Um festzustellen, ob die Entladung der Batterie einen Strom oder eine Entladung in dem inducirten Drahte hervorgerufen hatte, brachte ich in die Axe der Spirale, das heisst in ihre Glasröhre, eine stählerne Nadel (eine Nähnadel) und nach erfolgter Entladung legte ich sie auf ein kleines Stativ vor die obere Nadel des astatischen Systems eines Galvanometers, um womöglich mit Hilfe der auf das astatische System ausgeübten Abstossung zu erkennen, ob die Nadel durch die inducirte Entladung magnetisirt worden war. Selbstverständlich war die Nadel vor der Entladung daraufhin ausgewählt worden, dass sie sich im natürlichen Zustande befand, das heisst, dass keines ihrer Enden auf das bezeichnete System eine Abstossung ausübte. Die Länge der Nadel betrug 4,5 und ihre Dicke 0,1 cm. Die Versuche hatten folgendes Ergebniss:

1. Befand sich der inducirte Stromkreis gleichweit entfernt von den beiden inducirenden Stromkreisen, die von derselben Entladung in entgegengesetztem Sinne durchströmt wurden, so nahm die Nadel in der Spirale nicht den geringsten Magnetismus an.
2. Befand sich der inducirte Stromkreis dem einen der beiden inducirenden Stromkreise auch nur um ein weniges näher als dem anderen, so blieb die Nadel in der Richtung magnetisirt, in welcher die Magnetisirung auch durch den dem inducirten Stromkreis näheren inducirenden Stromkreis allein erfolgt wäre.
3. Kleine Veränderungen des mittleren Abstandes des inducirten Stromkreises von dem inducirenden waren hinreichend, um die Nadel so stark zu magnetisiren, dass sie

das astatische System bis zu 40 Grad aus seiner Ruhelage ablenkte.

Diese Versuche beweisen somit, dass der bekannte Satz von dem wellenförmigen Leiter auch für den Fall der inducirenden Kraft gilt, welche ein linearer Leiter erlangt; wenn er von der Entladung einer Leydner Flasche durchströmt wird, — einer Kraft, welche die Folge hat, in einem anderen jenem benachbarten und ebenfalls linearen Leiter eine ähnliche Entladung zu induciren.

23. Damit bei dem vorstehenden Versuch sich keine Fehler einschleichen, hat man sich zu überzeugen, dass während der Entladung weder von dem inducirten oder den inducirenden Leitern nach ihren Stützen oder gegen die Erde, noch auch von einem Punkte nach einem anderen des nämlichen Leiters eine Seitenentladung stattfindet. Zu diesem Zwecke empfiehlt es sich, die schon erwähnten Vorsichtsmaassregeln anzuwenden, sowie in gewissem Sinne die Intensität der Entladungen der Länge und dem Durchmesser des inducirenden Drahtes anzupassen. Man kann sicher sein, dass keine Seitenentladung (oder, genauer gesagt, keine Ableitung der Entladung von dem inducirenden Drahte) stattfindet, wenn man bei mehrmaliger probeweiser Wiederholung der Entladung im Dunkeln, wobei die Augen gegen den zu hellen Schein des Batteriefunkens zu schützen sind, längs der Leitungsdrähte keine Funken wahrnimmt.

[104] Beobachtet man diese Vorsichtsmaassregeln, so kann man sicher sein, bei Versuchen nach Art des beschriebenen constante Ergebnisse zu erhalten und nicht in Anomalien von der Art der zuerst von *Savary* erwähnten zu verfallen.

Als eine weitere nothwendige Vorsicht heben wir ferner hervor, dass bei der Entladung die Kugel des Entladers derjenigen der Batterie langsam zu nähern und alsbald nach dem Auftreten des ersten Funkens anzuhalten ist. Würde man anders verfahren, so würde die Nadel in der Spirale (falls die inducirten Entladungen nicht gleich und entgegengesetzt wären) durch die erste Entladung magnetisirt; die zweite Entladung, welche man bei weiterer Annäherung des Entladers an die Batterie erhielte, würde die Nadel nicht mehr im natürlichen Zustande antreffen und könnte durch ihre Wirkung die Erscheinung derart compliciren, dass der Experimentator in Irrthümer verfallen könnte.

Zur Messung der inducirenden Entladungen bediente ich mich des *Henley*'schen Elektrometers.

24. Es bliebe nun noch die Beschreibung des zur Verificirung der Thatsache (*d*) dienenden Versuches. Wir können jedoch davon absehen, indem wir den Leser auf den in § 13 beschriebenen Versuch verweisen, da ja der letzte Versuch des vorstehenden § 23 alle die Abänderungen enthält, welche an dem Versuche des § 13 anzubringen sind, um ihn für den Fall der Leydner Flasche geeignet zu machen.

25. Nachdem nun der Versuch gezeigt hat, dass die beiden Thatsachen (*c*) und (*d*) auch für den Fall der Leydner Flasche gelten, können wir den Satz aussprechen, dass die elektromotorische Kraft, welche durch ein von der Entladung einer Leydner Flasche durchströmtes lineares Element *ds'* in einem anderen ebenfalls linearen Elemente *ds* eines inducirten Kreises längs der Richtung dieses letzteren Elementes inducirt wird, sich nach denselben Gesetzen ändert, welche die Induction im Falle der Unterbrechung oder Schliessung von Volta-Strömen beherrschen.

26. Bei diesen zuletzt beschriebenen Versuchen hatte ich mich lediglich mit der Untersuchung zu befassen, ob die inducirenden Leiter, zwischen welchen sich der inducirte befand, einander genau das Gleichgewicht hielten, wenn der inducirte Leiter von beiden genau gleichweit entfernt war; nichts desto weniger beobachtete ich auch, dass die Richtung der direct von der Leydner Flasche inducirten Entladung (oder, nach einer in der Physik gebräuchlichen Bezeichnungsweise, der Entladung erster Ordnung) die gleiche ist wie diejenige der inducirenden Entladung[1]).

Bei Beobachtung aller im Vorstehenden angegebenen Vorsichtsmassregeln kann Jedermann leicht diese Versuche wiederholen; dieselben sind zwar, an und für sich betrachtet, überaus einfach, verdienen aber gleichwohl wegen der unabweislichen Folgerungen, zu welchen sie führen, berücksichtigt zu werden.

[**105**] Inzwischen empfiehlt es sich, während wir in unserem

---

[1]) Im Octoberheft 1853 der Annales sagte ich in Folge eines Irrthums bezüglich der Richtung der die Nadel magnetisirenden Spirale, dass die inducirte Entladung der inducirenden entgegengerichtet sei.

Gegenstand fortfahren, bezüglich der Interpretation, welche man der Formel (3′) — der Hauptformel, zu welcher uns der Versuch immer geführt hat — geben kann, einige Bemerkungen einzuschalten, mögen dieselben auch der Mehrzahl der Leser selbstverständlich erscheinen.

27. Wir haben die Formel (3′) als Elementarformel bezeichnet, nicht etwa weil wir glaubten, dieselbe sei der Ausdruck eines jener einfachen und darum allgemeinen Gesetze, welche in der Natur stets die innere Ursache einer Erscheinung beherrschen; die Formel (3′) wurde vielmehr als elementar bezeichnet, weil sie als differentiales Element in die Integrationen eintritt, welche zu dem Werthe des inducirten Stromes führen. Sogar die *Ampère*'sche Formel kann, wie dies auch von *Ampère* selbst nicht anders geschehen ist, von keinem anderen Gesichtspunkte aus als eine Elementarformel bezeichnet werden. Wir wissen wohl, dass wir bei dem augenblicklichen Stande der Wissenschaft ein inducirtes und inducirendes Element, also etwas durchaus nicht Einfaches, voraussetzen müssen und dass das Gesetz (3′) von noch unbekannten und sehr complicirten Erscheinungen abhängt, welche in den Elementen selbst vor sich gehen. Aber eine Arbeit von der Art der vorliegenden strebt nicht danach, die Erscheinungen zu erklären, sondern dieselben mit Hilfe der Rechnung und des Versuches zu ordnen.

28. In § 8 war bewiesen worden, dass die durch eine Aenderung der relativen Lage zweier geschlossener Stromkreise, des inducirten und des inducirenden, inducirte elektromotorische Kraft dem Unterschiede zwischen den Werthen proportional ist, welche der Ausdruck

$$\iint \frac{d^2E}{ds\,ds'}\,ds\,ds'$$

für diese beiden Lagen annimmt. So ist im Falle der Bewegung des einen Stromkreises, während der andere als ruhend betrachtet werden kann, die elektromotorische Kraft, welche inducirt wird, während die Mitte eines beliebigen Elementes des ersten Stromkreises in der Zeit dt den Weg do zurücklegt, proportional der Ableitung des vorstehenden Integralausdruckes nach o, wobei o als Function von s und t zu gelten hat.

Bis zu diesem Punkte wurden wir unmittelbar durch das Experiment geleitet.

Die fundamentalen Thatsachen, welche zur Aufstellung der Formel (3′) führten, beziehen sich jedoch sämmtlich auf lineare Stromkreise. Man kann deshalb die Frage aufwerfen, ob in dem allgemeineren Falle die Berechnung der inducirten elektromotorischen Kraft nach derselben Regel zu erfolgen hat, wie sie oben für die linearen Stromkreise entwickelt wurde. Das heisst, um uns klarer auszudrücken, betrachten wir die elektromotorische Kraft, welche von einem Elemente ds in einem anderen Elemente ds' während des kleinen Zeitintervalles dt inducirt wird, während dessen die beiden Elemente ds und ds' ihre relative Lage in der [106] Weise geändert haben, dass die Variablen θ, θ', ε und r in dem Ausdrucke (3′) (den wir etwa in die Form

$$\frac{ds\,ds'}{r}(A\cos\theta\cos\theta' + B\cos\varepsilon)$$

mit A und B als Constanten bringen können) unendlich kleine Aenderungen erfahren haben. Man kann dann fragen, ob diese elektromotorische Kraft als proportional der Ableitung des Ausdruckes (3′) gelten darf, wenn in demselben die Variablen θ, θ', ε und r als Functionen der Zeit t betrachtet werden.

Liesse sich diese Frage direct und mittels so einfacher und klarer Versuche wie die bisher beschriebenen beantworten, so wäre das Problem rasch und auf die beste Weise gelöst; indessen wurden so directe und einfache Experimente bis jetzt nicht ausgeführt. Niemals aber werden wir den Versuch aufgeben; können wir denselben nicht als sicheren Führer vor uns auf unserem Wege haben, sind wir durch die Natur unseres Problems gezwungen, dem Experiment vorauszugehen und unsere Arbeit immer ein wenig über den Punkt hinaus zu erstrecken, bis zu welchem wir zusammen mit ihm gelangt sind, so werden wir dennoch stets darauf achten, ob uns dasselbe beständig zu folgen vermag.

Einstweilen beginnen wir mit der Behandlung des Falles der Induction in einem Körper von beliebiger Gestalt und mit der Feststellung der Methode, nach welcher man die Ausbreitung der inducirten Ströme zu berechnen hat. Die Wahl dieser Methode wird ihrer Natur nach unabhängig von der Natur der analytischen Function stattfinden, welche die durch relative Lagenänderung zweier Elemente ds und ds', des indu-

cirten und des inducirenden, inducirte elektromotorische Kraft darzustellen hat.

Bei Anwendung dieser Methode auf einige Specialfälle werden wir sehen, ob der Versuch bis jetzt der Annahme günstig ist, dass die durch relative Lagenänderung zweier einem beliebigen Körper angehörigen Elemente ds und ds' inducirte elektromotorische Kraft, wie wir vorhin sagten, der entsprechenden Aenderung des Werthes von d^2E proportional ist. In der That erfordert die analytische Erörterung des allgemeinen Falles der Induction vor allem die Berechnung der durch relative Lagenänderung eines Elementes des inducirten Körpers in diesem Elemente selbst nach seinen verschiedenen Richtungen inducirten elektromotorischen Kraft.

29. In einem Leiter, der in einem beliebigen seiner Punkte nach der Richtung der inducirten elektromotorischen Kraft nur von linearer Gestalt ist, bleibt nothwendiger Weise nur die Richtung des Curvenelementes des Stromkreises übrig; in einem Leiter von beliebiger Gestalt dagegen, in welchem an jeder Stelle die Induction und der Strom in allen möglichen Richtungen stattfinden können, werden sich auch die elektromotorischen Kräfte nach allen Richtungen geltend machen; und nach einer bestimmten Richtung wird die elektromotorische [107] Kraft dieselbe sein, wie sie nach einem in dieser Richtung sich erstreckenden linearen Elemente bestehen würde.

Mag man nun die Formel (3′) zum Ausgangspunkt nehmen oder die Hypothese von *Weber* oder diejenige von *Neumann* annehmen oder eine neue aufstellen, so wird der analytische Ausdruck der elektromotorischen Kraft doch immer unter der folgenden Gestalt auftreten, der allgemeinsten, die man derselben überhaupt geben kann, wenn man nicht von Anfang an mit den Versuchsergebnissen in Widerspruch gerathen will:

$$(11) \qquad d^2E = (a'P + b'Q + c'R)\,ds\,ds'.$$

Darin bezeichnen $a'b'c'$ die Cosinus der Winkel, welche das inducirte Element ds' mit den Axen xyz einschliesst; PQR sind Functionen der Coordinaten von ds und ds', also von xyz und $x'y'z'$, aber unabhängig von $a'b'c'$.

Wie leicht zu bemerken, findet sich durch Verbindung der vorstehenden Formel mit der bekannten Beziehung

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1\,,$$

dass die Richtung des inducirten Elementes ds', für welche

der Betrag der elektromotorischen Kraft ein Maximum wird, durch folgende Werthe von $a'b'c'$

$$(12) \qquad a' = \frac{P}{H}, \quad b' = \frac{Q}{H}, \quad c' = \frac{R}{H}$$

gegeben ist, worin

$$H = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$$

zu setzen ist.

Das Maximum der elektromotorischen Kraft (d^2E) ist somit

$$(d^2E) = H\,ds\,ds'.$$

Bezeichnet φ den Winkel, welchen die Richtung der maximalen elektromotorischen Kraft mit einer anderen beliebigen Richtung einschliesst, so ist demnach die in dieser letzteren Richtung in demselben Körper inducirte elektromotorische Kraft durch die Formel

$$d^2E = H\cos\varphi \cdot ds\,ds'$$

dargestellt

Die Richtung, in welcher die inducirte Kraft gleich Null ist, findet sich normal zur Richtung der maximalen Kraft; und um die in einer beliebigen Richtung [108] inducirte Kraft zu finden, braucht man nur die maximale Kraft nach dem in der Mechanik für beliebige Kräfte gebräuchlichen Verfahren nach dieser Richtung zu zerlegen.

Ersetzt man $a'b'c'$ durch ihre Werthe

$$a' = \frac{dx'}{ds'}, \quad b' = \frac{dy'}{ds'}, \quad c' = \frac{dz'}{ds'},$$

so bemerkt man ferner, dass

$$(13) \qquad Pdx' + Qdy' + Rdz' = 0$$

die Differentialgleichung einer Fläche darstellt, auf welcher nach jeder in ihr gezogenen Richtung die elektromotorische Kraft gleich Null ist; und diese Fläche wird selbstverständlich von den Curven grösster Kraft, welche durch die aus Gleichung (12) zu gewinnenden Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
Q\,dx' - P\,dy' &= 0 \\
P\,dz' - R\,dx' &= 0 \\
R\,dy' - Q\,dz' &= 0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

gegeben sind, in normaler Richtung geschnitten.

Es ist sonach offenbar, dass der Körper im Augenblicke der Induction durch ein System von Flächen, auf welchen die elektromotorische Kraft gleich Null ist und welche in unendlich kleinem Abstande im Raume auf einander folgen, sowie durch ein System von Curven, welche zu jenen Flächen normal verlaufen und längs deren die elektromotorische Kraft ein Maximum ist, zerlegt wird. Man hat dabei wohl im Auge zu behalten, dass diese Systeme ihrer Natur nach von der Gestalt und Lage des inducirten Körpers, den sie auf diese Art zerlegen, unabhängig sind und dass sie deshalb in gewissem Sinne als in einem beliebigen Augenblicke mit dem inducirenden Körper verbunden betrachtet werden können.

30. Im Augenblicke der Induction wird ein Austritt von Elektricität hervorgerufen werden und den inducirten Körper längs des Systems der durch die Gleichungen (14) dargestellten Curven zu durchdringen streben. Angenommen, die Gleichungen (14) seien integrirbar, so wird sich aus ihnen und der Gleichung (11) leicht ableiten lassen, welches in einem gegebenen Augenblick der Induction nach den bekannten *Ohm*'schen Gesetzen der elektrische Zustand U des inducirten Körpers sein muss.

Es ist deshalb das System der Nullflächen der elektromotorischen Kraft als von zwei zu einander und zu dem ersten System orthogonalen Systemen von Flächen durchschnitten zu betrachten; die beiden neuen Systeme schneiden einander längs des Systems der durch die Gleichungen (14) dargestellten Curven, das heisst längs der Normalen zu den Nullflächen der Kraft.

[109] Der inducirte Körper wird auf diese Weise in eine Anzahl von Canälen zerlegt, die unendlich dünn, aber von variablem Querschnitt und normal zu den Nullflächen der Kraft, also längs der Curven des Maximums der Induction gerichtet sind.

Danach hat man die Ausbreitung der Ströme im Leiter zu berechnen, wobei jedes Element der erwähnten Canäle eine Batterie darstellen kann und muss, deren Pole einander un-

endlich nahe und längs der Leitcurve des Canales an den Enden des Elements gelegen sind; diese Enden müssen zwei Flächen angehören, in welchen die Kraft gleich Null ist und deren Entfernung von einander an jener Stelle gleich der Länge des Elementes des betrachteten Canals ist.

An jeder Stelle des inducirten Körpers mit den Coordinaten xyz hat man nach jeder Richtung zu betrachten:

1. den an dieser Stelle selbst inducirten Strom;

2. die Summe der Ströme, welche daselbst in Folge der Ausbreitung der an anderen Stellen des Körpers inducirten Ströme circuliren.

Bezeichnet somit u den elementaren elektrischen Zustand in Folge der Induction in einem Punkte $x'y'z'$, so ist u eine Function von $x'y'z'$ sowohl als von den Coordinaten xyz eines beliebigen anderen Punktes, dessen elektrischen Zustand man untersucht.

Den gesammten elektrischen Zustand U erhält man durch Integration von u über die ganze Ausdehnung des inducirten Körpers.

Ebenso stellt, wenn F die Intensität des elektrischen Stromes bezeichnet, der an jener Stelle des Körpers in Folge des an einer anderen Stelle mit den Coordinaten $x'y'z'$ inducirten Stromes in einer bestimmten Richtung vorhanden ist, das über den ganzen Körper genommene Integral von F den Gesammtstrom dar, welcher sich in Folge der an allen anderen Stellen des Körpers stattfindenden Induction nach jener Richtung fortpflanzt.

Ein derartiges allgemeines Verfahren zur Berechnung der Ausbreitung der inducirten Ströme hat bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft nichts Hypothetisches an sich. In der That ist es unmöglich, dass ohne eine Störung des Gleichgewichtes in dem natürlichen elektrischen Zustande eines Elementes, ohne das Vorhandensein einer elektrischen Differenz an den Enden desselben ein Elektricitätsaustritt oder ein Strom längs des Elementes erfolge, da dieses bei einem beliebigen Körper von endlichen Dimensionen unmöglich ist.

Bevor wir jedoch in unserem Hauptgegenstande fortfahren, müssen wir um der nöthigen Klarheit und besseren Ordnung in diesen kleinen Arbeiten willen, sowie um zu zeigen, wie die ohnehin den Physikern noch nicht genügend bekannte *Ohm*sche Theorie unmittelbar aus dem Versuche hervorgeht, sowie endlich um einige Formeln, welche uns demnächst in der

Theorie der Induction von Nutzen sein werden, ins rechte Licht zu setzen, eine kurze Betrachtung über die Theorie der Fortpflanzung der Volta-Elektricität in leitenden Körpern einschalten.

[110] 31. Betrachten wir also den Fall einer Batterie, deren Pole oder Leitungsdrähte mit zwei verschiedenen Stellen eines Leiters in Verbindung sind. Die Wirkung der Batterie wird darin bestehen, zwischen jenen beiden Stellen eine constante Differenz des elektrischen Zustandes[1]) zu unterhalten, weil, während jene Zustände sich innerhalb des Leiters fortpflanzen, die Elektricität der Batterie beständig für Erneuerung derselben sorgt. In der Nähe des negativen Poles wird somit ein negativer und in der Nähe des positiven Poles ein positiver elektrischer Zustand herrschen; innerhalb der Leitungsdrähte oder zwischen den Polen wird es Stellen geben, die sich im natürlichen elektrischen Zustande befinden. Das Gesetz aber, nach welchem dieser Zustand von einer Stelle zur anderen variirt, wird nicht von der Zeit abhängen und nur durch die Form und Natur des Körpers und die Lage der Zuführungsdrähte bedingt sein.

Zur Auffindung der Gesetze der Veränderungen jenes Zustandes, sowie der Intensität und Richtung der Ströme, welche in den Körper eindringen, liefert uns der Versuch, und nicht die Hypothese (deren sich zuerst *Ohm* bediente) die folgenden Grundthatsachen.

I. Die Intensität des Stromes, welcher einen homogenen Stab oder Draht von constantem Querschnitt, dessen Enden mit der Batterie in Verbindung stehen, durchströmt, ist proportional

1. dem chemischen Vorgang, welcher in der Batterie stattfindet, das heisst also der Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit innerhalb der Batterie frei wird;
2. dem Querschnitt des Stabes oder Drahtes;
3. dem umgekehrten Betrag der Länge des Drahtes;
4. einem Coefficienten, der nur für alle aus demselben Material bestehenden Stäbe oder Drähte constant ist und Coefficient der Leitfähigkeit heisst.

II. Bleibt die Kraft der Batterie constant, so bleibt der

---

[1]) Wir beabsichtigen dieser Bezeichnung eine möglichst allgemeine Bedeutung zu lassen; nichtsdestoweniger müssen wir den Leser an eine Abhandlung von Herrn *Kirchhoff* über die Interpretation des analytischen Werthes von u erinnern.

elektrische Zustand des Körpers und somit die Summe der Ströme, welche denselben an einer beliebigen Stelle durchströmen, mit der Zeit unveränderlich.

III. Die Zerstreuung der in dem Leiter sich fortpflanzenden Elektricität der Batterie in die Luft ist (wenigstens in den gewöhnlichen Fällen, wenn der sogenannte Widerstand gegen den Volta-Strom nicht ausserordentlich gross ist) gleich Null.

Die Richtigkeit dieser Thatsachen bedarf keiner Erörterung; durch die Versuche des Herrn *Pouillet*[1]) sind dieselben bereits in den Bestand der Wissenschaft übergegangen. Sehen wir nunmehr zu, wie man aus denselben den algebraischen Ausdruck u für die Veränderlichkeit des elektrischen Zustandes in den verschiedenen Theilen eines beliebigen Körpers, den wir der Einfachheit halber als homogen voraussetzen wollen, gewinnen kann.

[111] 32. Es sei[2])

$$u = f(x, y, z).$$

Denken wir uns innerhalb des Körpers ein geradliniges Element ds vom Querschnitt $d\omega$ isolirt, so wird der Unterschied des elektrischen Zustandes an seinen Enden, deren Coordinaten

$$x \pm dx, \quad y \pm dy, \quad z \pm dz$$

seien, durch den Ausdruck

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz$$

dargestellt. Wenden wir auf dieses Element von der Länge ds das vorhin in den Grundthatsachen von dem Stabe Gesagte an, so wird die Elektricitätsmenge, welche dasselbe in der Zeiteinheit von einem Ende zum anderen durchfliesst, oder die Intensität F des Stromes, durch die Formel

$$F = -k\frac{du}{ds}d\omega$$

---

[1]) S. Traité élémentaire de Physique par *M. Pouillet.*

[2]) Vgl. in *Poggendorff*'s Annalen die Arbeiten der Herren *Smaasen* und *Kirchhoff*, sowie eine Abhandlung des Marchese *L. Ridolfi* in der bei *Rocco Vannucchi* in Pisa 1847 publicirten Zeitschrift »Il Cimento«.

dargestellt sein, in welcher k den Coefficienten der Leitfähigkeit bezeichnet. Oder es ist

$$(15) \quad F = -kd\omega\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right),$$

worin $\alpha\beta\gamma$ die Winkel der Richtung von ds mit den Coordinatenaxen bezeichnen.

Wir werden uns nicht dabei aufhalten, zu zeigen, wie der Satz II der Rechnung unterworfen wird, da diese Rechnung aus den grundlegenden Theorien der Hydrodynamik und der Wärmelehre bekannt genug ist. Dieser Satz führt zu der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$(16) \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

Der Satz III liefert offenbar die folgende Bedingung

[112] $$(17) \quad \frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma = 0,$$

welche nur für die Oberfläche des Körpers gilt und in welcher $\alpha\beta\gamma$ die Winkel zwischen der Normalen zu dieser Oberfläche und den Axen xyz bezeichnen.

Damit sind die Grundformeln der *Ohm*'schen Theorie auseinandergesetzt, Formeln, welche Versuchsergebnisse darstellen, soweit bei derart allgemeinen Fragen vernünftiger Weise ein unmittelbarer Anschluss an das Experiment erwartet werden darf.[1])

[1]) Von verschiedener Seite wurde die Auffassung vertreten, als ob man zur *Ohm*'schen Theorie durch eine einfache Modification der Wärmetheorie gelangen könne. Zog man dann in Betracht, dass die Elektricität Erscheinungen darbietet, welche von denjenigen der Wärme sehr verschieden sind, so glaubte man ohne weitere Prüfung daraus schliessen zu dürfen, dass die Formeln *Ohm*'s unzulässig seien.

Vor allem jedoch ist es eine Thatsache, dass die erwähnten Formeln Versuchsergebnisse zum Ausdruck bringen. Ferner ist es eine Thatsache, dass sämmtliche Anwendungen der *Ohm*'schen Theorie genau und in einem bis jetzt von keiner physikalischen Theorie erreichten Grade der Erfahrung entsprochen haben. Beweis dafür sind die Versuche des Herrn *Kirchhoff* in Deutschland, des Herrn *Matteucci* und anderer. Die Versuche des Herrn *Pouillet* rechnen wir dabei nicht mit, weil sie als Grundlage dienen.

Ueberdiess ist zu bemerken, dass die Versuche des Herrn *Kirchhoff* über die Linien gleichen elektrischen Zustandes nicht

33. Es lässt sich leicht erkennen, dass der Werth von F in einem bestimmten Punkte eines Leiters ein Maximum wird, wenn die Richtung des Stromes mit den Coordinatenaxen die durch die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{1}{V}\frac{du}{dx}, \quad \cos\beta = \frac{1}{V}\frac{du}{dy}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{V}\frac{du}{dz},$$

worin

$$V = \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}$$

[113] zu setzen ist, bestimmten Winkel einschliesst. Dieser Maximalwerth beträgt danach

$$F = -k\,d\omega\,V.$$

Man erkennt ferner, dass die Richtung maximaler Strömung normal zu den Flächen mit der Gleichung

$$u = f(x, y, z) = \text{const.} = c,$$

das heisst normal zu den Flächen gleichen elektrischen Zustandes gerichtet ist.

34. Wenden wir nunmehr diese Formeln auf den Fall einer sehr dünnen homogenen Kreisscheibe an, auf welche die Pole einer Batterie gesetzt sind.

Den Coordinatenanfang nehmen wir im Mittelpunkt der Scheibe an; die z-Axe sei vertical gerichtet und L sei der

---

einfach eine Prüfung von aus der Theorie abgeleiteten numerischen Werthen bilden, sondern die Form solcher Linien oder Flächen, die sich aufs genaueste experimentell bestimmen lassen, zum Gegenstand haben; somit ist es möglich, die Prüfung anstatt auf die Zahlenwerthe, d. h. auf mehr oder minder genaue Annäherungen an die Versuchsergebnisse, welche ihrerseits wiederum sich den Thatsachen nur mehr oder minder nahe anschliessen, vielmehr auf die algebraische Form einer Function zu erstrecken.

Die Theorie der Wärme ist von ausgezeichneten Mathematikern den hervorragendsten Zweigen der mathematischen Physik zugerechnet worden; dennoch ist sie weit davon entfernt, so genaue und klare Versuche wie die *Ohm*'sche Theorie, welche ihr zur Stütze oder Bestätigung dienen könnten, aufweisen zu können; vielleicht verdankt sie die hohe Schätzung, welche sie geniesst, mehr als anderen Umständen den berühmten Arbeiten mathematischer Analyse, zu welchen sie Veranlassung gegeben hat.

Radius der Scheibe. Die Gleichungen (15), (16) und (17) reduciren sich dann auf die folgenden

$$F = -kd\omega\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta\right);$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0; \tag{18}$$

$$\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta = 0 \quad \text{für } L = r, \tag{19}$$

worin

$$r = x^2 + y^2$$

zu setzen ist.

In einer eleganten Arbeit hat Herr *Kirchhoff* bereits mit Hilfe der Theorie gezeigt und durch Versuche bestätigt, dass, wenn $L=\infty$ oder wenn die Leitungsdrähte mit der Peripherie der Scheibe in Verbindung gesetzt werden, der Werth von u durch den folgenden Ausdruck gegeben ist

$$u = k\log\frac{r_1^2}{r_2^2}, \tag{20}$$

in welchem r_1 und r_2 die Entfernungen eines beliebigen Punktes von den Zuleitungsstellen oder Polen der Batterie bezeichnen. Der Kürze halber verweisen wir deshalb den Leser auf diese gelehrte Arbeit des ausgezeichneten Physikers.

Man kann jedoch leicht eine allgemeinere Formel als Gleichung (20) erhalten; aus dieser letzteren wollen wir dieselbe ableiten.

[114] In unserem Falle, in welchem L einen endlichen Werth hat, reducirt sich die Gleichung (19) für $r=L$ auf

$$\frac{du}{dr} = 0.$$

Es sei nun

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi$$

und es werde

$$u = k\log\frac{r_1^2}{r_2^2} + \sum_{i=1}^{i=\infty} A_{(i)} r^{a_i}\cos a(\psi-\varepsilon) - \sum_{i=1}^{i=\infty} B_{(i)} r^{b_i}\cos b_i(\psi-\varepsilon_i)$$

gesetzt. Sehen wir zu, ob es möglich ist, durch Hinzufügung dieser zwei Reihen zu dem Werthe, welchen u für $L=\infty$ annimmt, diesen Werth so zu vervollständigen, dass derselbe für ein beliebiges L Geltung behält. Darin sind

$$A_{(i)},\ a_i,\ \varepsilon,\quad B_{(i)},\ b_i,\ \varepsilon_i$$

Constanten, welche aus Gleichung (19) für einen beliebigen Werth von ψ zu bestimmen sind. Andere Bedingungen sind nicht zu erfüllen, da jedes Glied von u für sich der Gleichung (18) genügt.

Es seien nun ϱ und ϱ_1 die Abstände der Pole der Batterie vom Mittelpunkt der Scheibe, θ und θ_1 die Winkel zwischen ϱ bezw. ϱ_1 und der x-Axe. Dies vorausgesetzt, führt uns die Bedingung (19) zur folgenden Gleichung

$$0 = 2k\left\{\frac{L-\varrho\cos(\psi-\theta)}{L^2-2\varrho L\cos(\psi-\theta)+\varrho^2} - \frac{L-\varrho_1\cos(\psi-\theta_1)}{L^2-2\varrho_1 L\cos(\psi-\theta_1)+\varrho_1^2}\right\}$$
$$+\sum_{i=1}^{i=\infty} a_i A_{(i)} L^{a_i-1}\cos a_i(\psi-\varepsilon) - \sum_{i=1}^{i=\infty} b_i B_{(i)} L^{b_i-1}\cos b_i(\psi-\varepsilon_1),$$

welche für jeden Werth von ψ erfüllt sein muss, wobei wir bemerkt hatten, dass für $r=L$

$$r_1^2 = L^2 - 2\varrho L\cos(\psi-\theta) + \varrho^2,$$
$$r_1^2 = L^2 - 2\varrho_1 L\cos(\psi-\theta_1) + \varrho_1^2$$

wurde.

[115] Die bekannte allgemeine Reihe

$$\frac{p-q\cos\varphi}{p^2-2pq\cos\varphi+q^2} = \frac{1}{p} + \frac{q}{p^2}\cos\varphi + \frac{q^2}{p^3}\cos 2\varphi + \cdots$$

führt uns nun bei der Bestimmung unserer Constanten auf die folgenden Gleichungen:

$$\varepsilon = \theta,\quad \varepsilon_1 = \theta_1,\quad a_i = i,\quad b_i = i$$
$$A_{(i)} = -2k\frac{\varrho^i}{iL^{2i}},\quad B_{(i)} = +2k\frac{\varrho_1{}^i}{iL^{2i}};$$

und es ergiebt sich somit

$$u = k \log \frac{r_1^2}{r_2^2} - 2k\left\{\frac{\varrho r}{L^2}\cos(\psi-\theta) + \frac{\varrho^2 r^2}{2L^4}\cos 2(\psi-\theta) + \cdots\right\}$$
$$+ 2k\left\{\frac{\varrho_1 r}{L^2}\cos(\psi-\theta_1) + \frac{\varrho_1^2 r^2}{2L^4}\cos 2(\psi-\theta_1) + \cdots\right\}.$$

Die in Klammer eingeschlossenen Ausdrücke lassen sich jedoch leicht summiren, da bekanntlich

$$\log \frac{1}{1-2s\cos\varphi+s^2} = 2\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{s^i}{i}\cos i\varphi$$

ist; der gesuchte Werth von u reducirt sich sonach auf

$$(21) \qquad u = k \log \frac{r_1^2\{L^4 - 2\varrho L^2 r\cos(\psi-\theta) + \varrho^2 r^2\}}{r_2^2\{L^4 - 2\varrho_1 L^2 r\cos(\psi-\theta_1) + \varrho_1^2 r^2\}}.$$

Für $L = \infty$ reducirt sich der Werth von u wiederum auf dieselbe Form der Gleichung (20) für den Fall, dass die Pole sich auf der Peripherie der Scheibe befinden, oder mit anderen Worten für den Fall, dass $\varrho_1 = \varrho = L$; und dieses Resultat stimmt mit den Versuchsergebnissen überein.

35. Die *Ohm*'sche Theorie lässt sich ohne Schwierigkeit auch auf den Fall einer homogenen Kugel anwenden. Die Bedingungsgleichung (17) reducirt sich für diesen Fall, wenn $r = L$, dem Radius der Kugel gesetzt wird, auf

$$\frac{du}{dr} = 0.$$

[116] Die Berechnung ist in diesem Falle der vorigen vollständig analog und wir werden uns deshalb nicht länger bei diesem Gegenstande aufhalten; es genügt uns, die hauptsächlichsten Anwendungen der *Ohm*'schen Theorie, welche uns im Folgenden von Nutzen sein werden, kurz berührt zu haben, und im Uebrigen verweisen wir den Leser auf die Abhandlung des Herrn *Kirchhoff*, auf die in der Anmerkung citirten Abhandlungen und hauptsächlich auf diejenige des Herrn *L. Ridolfi*, in welcher auch die Arbeiten des Herrn *Kirchhoff* selbst, sowie diejenigen des Herrn *Smaasen* dargestellt sind.

Im Falle der Kugel ergiebt sich, wenn r_1 und r_2, sowie ϱ_1 und ϱ_2 die gleiche Bedeutung haben, wie vorhin, und wenn

φ_1 und φ_2 die Winkel zwischen r, der Verbindungslinie eines beliebigen Punktes mit dem Mittelpunkte der Kugel, und ϱ_1, bezw. ϱ_2 bezeichnen,

$$u = k\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + Lk\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + Lk\int\frac{dr}{r}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

worin

$$R_1^2 = L^4 - 2\varrho r L^2 \cos\varphi_1 + \varrho^2 r^2,$$
$$R_2^2 = L^4 - 2\varrho_1 r L^2 \cos\varphi_2 + \varrho_1^2 r^2$$

zu setzen ist.

Das Integral in der obigen Gleichung ist unbestimmt, aber es ist gleichgültig, ob man demselben eine Constante hinzufügt oder nicht, da dieselbe ja auf die Ableitungen, welche nach *Ohm*'s Theorie die Stromintensität in einem beliebigen Punkte des Leiters angeben, keinen Einfluss hat. Zudem lässt sich dieses Integral sehr leicht mittels der bekannten gewöhnlichen Formeln erhalten.

36. Die vorstehenden Formeln lassen den Werth von u an den Polen nicht bestimmen. In der That findet an den Punkten, an welchen die Batterie direkt mit dem Leiter in Verbindung ist, eine Unterbrechung der Continuität statt. Die Constante k lässt sich jedoch bestimmen, indem man die Ströme summirt, welche den Leiter von einem Pol zum andern durchlaufen; und dies lässt sich ohne Schwierigkeit ausführen, da diese Summe gleich derjenigen der Ströme ist, welche irgend eine von den Flächen gleichen elektrischen Zustandes durchlaufen. Zur Ausführung der Rechnung wird man dann diejenige Fläche wählen, welche die geringsten analytischen Schwierigkeiten darbietet.

37. Einstweilen ist es zweckmässig, aus der Gleichung (21) für den Fall der Scheibe unter Berücksichtigung des in § 30 Gesagten die Formel für den Fall abzuleiten, dass die beiden Leitungsdrähte einander sehr nahe sind. Diese Formel wird uns im Folgenden ebenfalls von Nutzen sein.

Es sei Δ der Abstand zwischen den beiden Leitungsdrähten oder den Polen;
R der Abstand der Mitte von Δ vom Mittelpunkt der Scheibe;
φ der Winkel zwischen R und der x-Axe;
ε der Winkel zwischen Δ und dieser Axe.

Unter Vernachlässigung der zweiten Potenz von Δ geht dann [117] die Gleichung (21) über in

$$u = k \Delta v ,$$

worin

$$(22) \qquad v = \frac{R \cos(\varphi - \varepsilon) - r \cos(\varepsilon - \psi)}{R^2 + r^2 - 2 r R \cos(\varphi - \psi)} + \frac{R r^2 \cos(\varphi - \varepsilon) - L^2 r \cos(\varepsilon - \psi)}{L^4 + 2 L^2 r R \cos(\varphi - \psi) + r^2 R^2}$$

zu setzen ist.

38. Nach dem in §§ 29 und ff. Gesagten hat man behufs Berechnung der in einen Leiter eindringenden Ströme folgendermaassen vorzugehen:

1. Aus der Differentialgleichung (11) ist die allgemeine Gleichung der Flächen abzuleiten, in welchen die elektromotorische Kraft gleich Null ist.
2. Zu diesem ersten System von Flächen sind zwei weitere Systeme von Flächen hinzuzufügen, die mit jenem ein System dreier orthogonaler Flächen bilden, welches den leitenden Körper in lauter unendlich kleine Volumelemente zerlegt.
3. Jedes dieser Elemente ist in der zu den Nullflächen der Kraft normalen Richtung polarisirt zu denken, das heisst also als eine Batterie zu betrachten, deren Pole sich auf den beiden durch zwei einander unendlich nahe Nullflächen gebildeten Endflächen des Elementes befinden. Der Kürze halber bezeichnen wir eine derartige Batterie als Elementarbatterie.
4. Die elektromotorische Kraft der Elementarbatterie ist proportional zu der in der Richtung der Batterie inducirten elektromotorischen Kraft anzunehmen; diese letztere wird unter den in diesem Punkte des Leiters nach allen Richtungen möglichen ein Maximum sein.
5. Der elektrische Zustand des Körpers ist aus der Summe der elektrischen Zustände abzuleiten, welche von den Elementarbatterien, deren Zahl unendlich ist, im Körper fortgepflanzt werden.
6. Es ist, immer nach *Ohm*'s Theorie, der Strom zu berechnen, welcher in Folge der Ausbreitung der Ströme, die an anderen Stellen durch den bereits berechneten elek-

trischen Zustand des Körpers inducirt werden, einen bestimmten Punkt M in einer bestimmten Richtung passirt.

7. Der in diesem Punkte M inducirte Strom wird direct aus der Elementarformel (11) der Induction bestimmt.

Dieses ist das allgemeine Verfahren, welches sich nach unserer Ansicht bei Betrachtung der allgemeinen Bedingungen der Erscheinung und an der Hand der experimentellen Kenntnisse, welche wir gegenwärtig besitzen, von selbst darbietet und welches darum in erster Linie und vor jeder Hypothese geprüft werden muss. Ob und inwiefern dasselbe einer Abänderung bedarf, wird durch den Versuch zu entscheiden sein. [118] Welcher Ergänzungen das Verfahren bedarf, um die Erscheinung sowohl in allen ihren Einzelheiten wie in ihrer Allgemeinheit zu umfassen, wird später erwähnt werden; einstweilen sind wir, da dasselbe wenn nicht alle, so doch die wichtigsten und von der Erfahrung dargebotenen Umstände in Betracht zieht, eines methodischen Fortschrittes in der analytischen Behandlung der Erscheinung sicher, sobald wir die ersten Resultate jenes Verfahrens mit den Versuchsergebnissen verglichen haben. Wir würden auch gar keinen wirklichen Vortheil erlangen, wenn wir in die Rechnung Betrachtungen einführen wollten, welche auf alle Fälle nur unwesentlich und keineswegs von grundlegender Bedeutung für die Theorie sind und darum auf die allgemeinste Erörterung der Erscheinung keinen Einfluss haben dürften, während sie die Formeln derart verwickeln würden, dass die Berechnung selbst in den besonderen Fällen unmöglich würde, in welchen wir dieselbe jetzt zu Ende zu führen vermögen.

39. Der allgemeine Fall der Induction schliesst einen Specialfall ein, welcher nicht allein den Vortheil einer leichten mathematischen Behandlung hat, sondern auch hinsichtlich der physikalischen Interpretation, hinsichtlich der Art und Weise, wie wir die Fortpflanzung der Ströme im Leiter uns zu denken haben, so einfache Verhältnisse darbietet, dass die aus der Rechnung zu ziehenden Schlussfolgerungen keinem Zweifel unterliegen können. Diese Schlussfolgerungen werden sonach nicht nur für sich allein klar und auf alle Fälle im Geiste gesichert erscheinen, sondern auch unserem mehrerwähnten Verfahren zur Stütze gereichen.

Es handelt sich um den Fall, dass das System der Flächen, in welchen die Kraft gleich Null ist, durch die allgemeine Differentialgleichung (13), das heisst durch

$$0 = Pdx + Qdy + Rdz$$

dargestellt wird, so dass, wenn f eine Function von xyz bezeichnet,

$$P = \frac{df}{dx}, \quad Q = \frac{df}{dy}, \quad R = \frac{df}{dz}$$

ist und f den bekannten Gleichungen (16) und (17) der *Ohm*'schen Theorie genügt.

Betrachtet man nämlich in einem Leiter, in welchem die durch die beliebige Funktion u bezeichneten Zustände in dynamischem Gleichgewichte sind, die Fähigkeit jedes Elementes, das Fluidum oder die Elektricität an andere Stellen des Körpers fortzutreiben, das heisst mit anderen Worten sieht man jedes Element des Körpers als eine Elementarbatterie an, deren Polarlinie eine unveränderliche Richtung hat und die einen Strom von constanter Intensität (gemäss den Formeln des § 33, welche die Intensität und Richtung des Strömungsmaximums durch die nämliche Funktion u ausdrücken) liefert, so wird der elektrische Zustand in einem beliebigen Punkte, das ist die Summe der [119] von sämmtlichen Elementarbatterien des Körpers ihm mitgetheilten elektrischen Zustände, nach Vornahme der Berechnung durch dieselbe Funktion u ausgedrückt sein, die ursprünglich den Ausgangspunkt gebildet hatte; denn wäre dies nicht der Fall, so hätte das dynamische Gleichgewicht nicht durch u ausgedrückt werden können.

Nun überlege man, dass die analytischen Operationen, welche wir nach § 30 mit dem Integral der Gleichung (13) als Ausgangspunkt (dasselbe genügt in dem hier erörterten Falle auch den Bedingungen, welche von der *Ohm*'schen Theorie für den Ausdruck eines elektrischen Gleichgewichtszustandes in einem Leiter gefordert werden) vorzunehmen hätten, um nach den Theorien der Induction den Werth des veränderlichen elektrischen Zustandes in dem inducirten Körper zu finden, genau dieselben sind, die wir auch nöthig hätten, um gemäss der *Ohm*'schen Theorie, wie vorhin auseinandergesetzt worden, durch mathematische Operationen von der Betrachtung aller jener kleinen Elementarbatterien wiederum zu dem Werthe des allgemeinen elektrischen Zustandes des Körpers zu gelangen. Jene Operationen sind überdies an den gleichen algebraischen Ausdrücken vorzunehmen und wir dürfen deshalb schliessen, dass wir mit der Methode des § 30 nach

Ausführung der Rechnung in diesem Specialfalle für den Ausdruck des veränderlichen elektrischen Zustandes die nämliche Function u, also das Integral der Gleichung (13), wiederfinden würden.

Dieses glückliche Zusammentreffen erspart es uns, Rechnungen zu versuchen, die unter Umständen unausführbar sein können.

In diesem Falle ist also der elektrische Zustand des Körpers durch die allgemeine Gleichung

$$u = f(x, y, z)$$

dargestellt.

Nun ist es allerdings richtig, dass wir, falls die Function f auch die Gleichung (17) erfüllen sollte, auf die Betrachtung zu weniger Fälle beschränkt wären und zu viele glückliche Zufälle für uns verlangen würden. Da aber alle unsere Bemühungen darauf gerichtet sind, nicht etwa algebraisch allgemeine Resultate aufzufinden, sondern die Rechnung immer mehr gewissen einfachen oder doch wenigstens nicht allzu schwierigen Versuchen anzupassen, so können wir in vielen Fällen auf die Gleichung (17) verzichten, indem wir eben die Fälle behandeln, in welchen der in unmittelbarer Nähe der Oberfläche inducirte Strom gleich Null gesetzt oder doch wenigstens vernachlässigt werden darf.

In dem obenerwähnten Falle halten die inducirten elektromotorischen Kräfte nach dem *Ohm*'schen Gesetze einander das Gleichgewicht; das heisst der an einem beliebigen Punkte des Körpers inducirte Strom ist demjenigen gleich und gleichgerichtet, der in Folge der Ausbreitung der an anderen Stellen desselben Körpers inducirten Ströme daselbst vorhanden sein muss. Mit anderen Worten können wir auch sagen, der aus der Induction an sämmtlichen Stellen des Körpers resultirende elektrische Zustand liefere ein System über den Leiter vertheilter Ströme, welches dem in dem Körper selbst inducirten gleich und über dasselbe gelagert ist.

40. Analysiren wir den Fall der durch momentane Magnetisirung eines unendlich dünnen cylindrischen Stabes inducirten Ströme, wenn dieser Stab [**120**] normal zu einer ebenfalls unendlich dünnen Ebene, deren Grösse als unendlich gelten kann — wir denken etwa an ein Stanniolblatt — gerichtet ist. Wir wollen noch voraussetzen, einer der Pole berühre die Ebene oder befinde sich nur in sehr kleinem Ab-

stande von derselben, während die Entfernung des anderen Poles als unendlich gross gelten kann.

Betrachten wir die in einem linearen Elemente ds' durch das momentane Auftreten eines Kreisstromes inducirte elektromotorische Kraft. Es sei ω die (sehr kleine) Fläche des letzteren, r_1 die Entfernung ihres Mittelpunktes von der Mitte des inducirten Elementes ds', α' der Winkel zwischen der Richtung von ds' und der Normalen zu der Ebene, welche r_1 enthält und normal zu dem Kreisstrome steht; ferner sei ϱ_1 der Abstand des Elementes ds' von der durch die Mitte des Kreisstromes gehenden Normale zur Ebene desselben; dann findet sich diese elektromotorische Kraft nach dem in § 16 Gesagten:

$$dE = -A\omega \frac{\varrho_1 \cos\alpha'}{r_1^3} ds'.$$

A ist eine Constante und das negative Vorzeichen bedeutet, dass die inducirte Kraft die entgegengesetzte Richtung hat wie die inducirende. Dieser Formel werden wir uns auch in dem Falle der momentanen Magnetisirung oder Polarisation eines magnetisirbaren Elementes bedienen.

Sind nun abc, $a'b'c'$ die Cosinus der Winkel, welche die durch den Mittelpunkt des Kreisstromes gehende und normal zu seiner Ebene gerichtete Axe, sowie das Element ds' bezw. mit den Axen xyz einschliessen, und sind xyz, bezw. $x'y'z'$ die Coordinaten des Mittelpunktes des Kreisstromes, bezw. des Elementes ds', so wird

$$(23) \qquad dE = A\omega ds' \left\{ a \frac{b'(z-z') - c'(y-y')}{r_1^3} + b \frac{c'(x-x') - a'(z-z')}{r_1^3} + c \frac{a'(y-y') - b'(x-x')}{r_1^3} \right\},$$

worin

$$r_1^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

zu setzen ist. In unserem Falle haben wir, wenn die z-Axe vertical und die xy-Ebene als inducirte Ebene angenommen wird,

$$a = 0\,, \quad b = 0\,, \quad c' = 0\,, \quad z' = 0.$$

$$(24) \qquad dE = A\omega ds' \frac{a'(y-y') - b'(x-x')}{r_1^3}.$$

Um nun die durch die momentane Magnetisirung des ganzen Magnets inducirte Kraft E zu finden, multipliciren [121] wir den vorstehenden Ausdruck mit dz und integriren zwischen $z = 0$ und $z = \infty$; es folgt dann

$$(25) \qquad E = \int_0^\infty dE\,dz = A\omega\,ds'\,\frac{a'(y-y') - b'(x-x')}{(x-x')^2 + (y-y')^2}\,.$$

Der vorstehende Ausdruck erreicht ein Maximum, wenn die Richtung von ds' durch die Gleichungen

$$a' = \frac{y-y'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}\,,\quad b' = -\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}$$

bestimmt ist; und der Betrag der in dieser Richtung wirkenden maximalen Kraft (E) ist durch den Ausdruck

$$(E) = A\omega\,ds'\,\frac{1}{r_1}$$

gegeben, worin

$$r_1^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2\,.$$

Die allgemeine Gleichung der Nulllinien der Kraft ist

$$(y-y')\,dx' - (x-x')\,dy' = 0\,.$$

Wie leicht vorauszusehen war, sind somit die Curven stärkster Induction concentrische Kreise, deren Mittelpunkt am Fusse des Magneten liegt; die Linien, längs deren die Kraft gleich Null ist, sind Gerade, welche von diesem Mittelpunkte ausgehen.

Der aus der Ausbreitung der inducirten Ströme resultirende elektrische Zustand in der Ebene ergiebt sich gleich Null und es sind somit an jeder Stelle der Ebene keine anderen Ströme zu berücksichtigen, als die an der betreffenden Stelle selbst inducirten. Es ist dies einer der Fälle, in welchen ein Körper von elektrischen Strömen durchflossen sein und doch, soweit sein gesammter elektrischer Zustand in Betracht kommt, immer den natürlichen Zustand bewahren kann. Dies braucht nicht zu überraschen, da auch eine auf gewöhnliche Art aus einer beliebigen Anzahl von Elementen aufgebaute Batterie, deren Pole jedoch nicht durch einen Leitungsdraht mit einander ver-

bunden, sondern direct miteinander vereinigt sind, den Fall darbietet, dass die in jedem Element für sich entstehenden elektrischen Elementarzustände als Gesammtergebniss im ganzen Stromkreise den elektrischen Nullzustand zur Folge haben.

[122] Die elektrodynamische Wirkung der Ebene ergiebt sich aus den bekannten Formeln *Ampère*'s; in der That weiss ein Jeder, dass man das Vorhandensein der inducirten Ströme aus der elektrodynamischen Wirkung erkennt, welche in diesem Falle bei der Schliessung des Volta-Stromkreises oder der momentanen Magnetisirung zwischen der Ebene und dem inducirenden Magnet auftritt.

41. Nehmen wir nun an, der erwähnte Magnet oder Stab sei permanent magnetisirt und die Induction der Ströme erfolge durch eine Rotation der leitenden Ebene um die z-Axe.

Nach § 8 der ersten Abhandlung ist die elektromotorische Kraft E', welche in der Richtung des Elementes ds' während einer unendlich kleinen Lagenänderung desselben mit Bezug auf den Magnet in Folge der Rotation der Ebene, zu welcher das Element gehört, inducirt wird, proportional der entsprechenden Aenderung der Formel (13).

Setzen wir nun

$$x = l\cos\varphi\,, \quad y = l\sin\varphi\,.$$

l, die Entfernung des Magnets vom Drehungsmittelpunkt, bleibt in unserem Falle constant. Wird dann die Gleichung (13) nach φ differenzirt und hierauf der Einfachheit halber $\varphi = 0$ gesetzt — was damit gleichbedeutend ist, dass wir als x-Axe die Gerade l annehmen, welche den Fuss des Magnets mit dem Drehungsmittelpunkt verbindet — so erhalten wir für den Werth dieses Differentials, das heisst für E'

$$E' = A\omega l\,d\varphi\,ds'\,\frac{a'[(l-x')^2 - y'^2] - 2b'(l-x')y'}{[(l-x')^2 + y'^2]^2}\,.$$

Darin bezeichnet $l\,d\varphi$ die Rotationsgeschwindigkeit des Magnets mit Bezug auf die Ebene oder umgekehrt. Wird nun $r_2^2 = (l-x')^2 + y'^2$ und an Stelle von a' und b' bezw.

$$\frac{dx'}{ds'} \quad \text{und} \quad \frac{dy'}{ds'}$$

gesetzt, so folgt als Gleichung der Linien, längs deren die Kraft gleich Null ist,

$$\frac{(l-x')^2-y'^2}{r_2^4}dx' - 2y'\frac{(l-x')}{r_2^4}dy' = 0$$

und als Gleichung der Linien stärkster Induction

$$\frac{(l-x')^2-y'^2}{r_2^4}dy' + 2y'\frac{(l-x')}{r_2^4}dx' = 0\,.$$

[123] Für den Werth des Maximums der inducirten elektromotorischen Kraft (E') erhalten wir

$$(E') = A\omega l d\varphi ds'\frac{1}{r_2^2}\,. \tag{26}$$

Das Integral der vorstehenden Differentialausdrücke ist leicht zu finden; man erhält als Gleichung der Nulllinien der Kraft

$$(l-x')^2 + y'^2 = 2\varrho_1(l-x')\,, \tag{27}$$

und als Gleichung der Linien maximaler Kraft

$$(l-x')^2 + y'^2 = 2\varrho_2 y'\,, \tag{28}$$

worin ϱ_1 und ϱ_2 Constanten sind, deren Werth beim Uebergang von einer Linie zur anderen variirt.

So sind die Nulllinien der Induction Kreise mit dem Radius ϱ_1, deren Mittelpunkt auf der x-Axe liegen, die Linien maximaler Induction dagegen Kreise mit dem Radius ϱ_2, deren Mittelpunkte sich auf der Axe befinden, welche durch das Fussende des Magnets geht und normal zur x-Axe gerichtet ist; alle diese Kreise gehen durch diesen Fuss oder Pol des Magnets.

42. Wir wollen nunmehr die Anwendung der im Vorigen auseinandergesetzten Methode an einem Beispiel erläutern. Der grösseren Allgemeinheit halber sei zunächst vorausgesetzt, die leitende Ebene sei nicht unendlich, sondern eine Scheibe mit dem Radius L, deren Mittelpunkt mit dem Rotationsmittelpunkt zusammenfalle.

Ist die Rotationsgeschwindigkeit unserer Scheibe sehr klein im Verhältniss zu der Geschwindigkeit, mit welcher eine inducirte elektromotorische Kraft verschwindet, und behält ferner unsere Scheibe, wie dieses in der That jetzt der Fall ist, beständig die gleiche Lage mit Bezug auf den Magnet, so tritt an Stelle des Elementes ds' in jedem Augenblick ein anderes

inducirtes Element, dessen Polaritäten schon im vorhergehenden Augenblicke in Folge der Leitfähigkeit der Scheibe sich entwickelt hatten und auch schon wieder verschwunden waren.

So wird der in einem gegebenen Augenblicke in der Scheibe entstandene und wieder neutralisirte elektrische Zustand im nächsten Augenblicke durch die nachfolgende Induction in einem derartigen Elemente ds' auf's neue erzeugt und wiederum neutralisirt; dieses Element kann als zur festen xy-Ebene gehörig betrachtet werden und die Vertheilung der Ströme und des elektrischen Zustandes kann auf dieselbe xy-Ebene, die sammt dem Magnete während der Rotation der materiellen inducirten Ebene unbeweglich bleibt, bezogen werden.

[124] Rotirt die Ebene mit constanter Geschwindigkeit, so ist das Product $l d\varphi$ von der Zeit unabhängig.

Nach unserer Methode muss das Element ds' als in der Richtung der maximalen Induction liegend vorausgesetzt werden; die inducirte elektromotorische Kraft ist sonach

$$\mu \frac{ds'}{r_2^2},$$

worin $\mu = A\omega l d\varphi$ gesetzt ist und ω den Querschnitt des Magnets bezeichnet. Es repräsentirt ds' den veränderlichen Abstand zwischen zwei Nulllinien der Kraft, oder das Element der durch den Punkt mit den Coordinaten $x'y'$ gehenden Linie maximaler Kraft. Ist dagegen $d\lambda$ das Element einer Linie, längs deren die Kraft gleich Null ist, $ds' d\lambda$ also das Flächenelement der inducirten Ebene, und bezeichnet u den elektrischen Elementarzustand der Scheibe, so ist in Folge der Induction im Flächenelemente

$$u = \mu \frac{v}{r_2^2} ds' d\lambda,$$

worin v nach § 37 bestimmt ist.

Der Strom, welcher sich in Folge der in dem Punkte $x'y'$ stattfindenden Induction in einem Punkte des Leiters mit den Coordinaten $\xi\zeta$ nach einer Richtung fortpflanzt, welche mit den Coordinatenaxen xy bezw. die Winkel α und β einschliesst, ist durch die Gleichung

$$F = -\mu \frac{ds' d\lambda}{r_2^2} d\sigma \left(\frac{dv}{d\xi} \cos\alpha + \frac{dv}{d\zeta} \cos\beta \right)$$

gegeben, worin $d\sigma$ ein beliebiges Curvenelement bezeichnet, welches von dem Strome F durchflossen und normal zu demselben gerichtet sein soll. r_2 ist unabhängig von ξ und ζ.

Wir wissen bereits, dass die Ableitung von v, und mithin F, nach einer zum Umfange der Scheibe normalen Richtung für $r = L$, dem Radius der Scheibe, gleich Null wird.

Der totale elektrische Zustand der Scheibe ist durch die Formel

$$U = \mu \iint \frac{v}{r_2^2}\, ds'\, d\lambda \tag{29}$$

dargestellt; die Stärke des Stromes, welcher die Stelle mit den Coordinaten ξ und ζ in Folge der von anderen Stellen der Scheibe aus verbreiteten Ströme durchfliesst, ist

[125]

$$F = -\mu\, d\sigma \left(\cos\alpha \iint \frac{dv}{d\xi} \frac{ds'\, d\lambda}{r_2^2} + \cos\beta \iint \frac{dv}{d\zeta} \frac{ds'\, d\lambda}{r_2^2} \right). \tag{30}$$

Die Integrale sind über die ganze Fläche der Scheibe zu erstrecken.

In den vorstehenden Gleichungen (29) und (30), welche zusammen mit Gleichung (26) die Lösung des Problems für diesen Fall bilden, müssen die Variabeln, nach welchen die in den Gleichungen (16) und (17) angedeuteten Differentiationen vorgenommen werden, unabhängig von den Integrationsgrenzen sein.

43. Die Integration der Gleichungen (29) und (30) wäre möglich, aber sehr mühsam, falls L bei der Berechnung einen endlichen Werth behalten sollte. Uns genügt es jedoch, die Lösung des Problems für den Fall zu Ende zu führen, dass $L = \infty$ ist. Dann nimmt v eine sehr einfache Gestalt an und die Grenzen einer ersten Integration sind unabhängig von der Variabeln, bezüglich deren die zweite Integration vorzunehmen ist.

Die Auflösung der Gleichungen (27) und (28) ergiebt

$$l - x' = \frac{2\varrho_1 \varrho_2^2}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}, \quad y' = \frac{2\varrho_2 \varrho_1^2}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}.$$

Der Werth von ds' lässt sich durch Ableitung der vorstehenden Gleichungen nach ϱ_1 erhalten; man findet

$$ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2} = \frac{2\,d\varrho_1}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}\,\varrho_2^2\,,$$

oder

$$ds' = \frac{l - x'}{\varrho_1}\,d\varrho_1\,.$$

Berücksichtigen wir nun, dass $r_2{}^2 = 2\varrho_1\,(l - x')$ ist, so haben wir

$$U = 2\mu \iint \frac{v\,d\varrho_1\,d\lambda}{\varrho_1^2}\,,$$

Für $L = \infty$ wird

$$v = \frac{r\cos(\varepsilon - \psi) - R\cos(\varphi - \varepsilon)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi)}\,;$$

[126] dieser Werth kann jedoch in die Form

$$v = \frac{\varrho_1 - h\cos(\omega - \sigma)}{\varrho_1^2 - 2h\varrho_1\cos(\omega - \sigma) + h^2}$$

gebracht werden. In dieser bezeichnet h den Abstand des Punktes, dessen elektrischer Zustand betrachtet wird, vom Mittelpunkt derjenigen Nulllinie der Induction, deren Radius ϱ_1 ist; ferner bezeichnet σ den Winkel zwischen h und der x-Axe, ω den Winkel zwischen ϱ_1 (der Verbindungslinie des Mittelpunktes der Elementarbatterie mit dem Mittelpunkt der Nulllinie der Induction) und der x-Axe. Wird endlich $d\lambda = \varrho_1\,d\omega'$ und $\omega' = \omega - \sigma$ gesetzt, so ist

$$U = 2\mu \int_{\varrho_1 = 0}^{\varrho_1 = \infty} \frac{d\varrho_1}{\varrho_1} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho_1 - h\cos(\omega - \sigma)}{\varrho_1^2 - 2\varrho_1 h\cos(\omega - \sigma) + h^2}\,d\omega'.$$

Das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varrho_1 - h\cos\omega'}{\varrho_1^2 - 2\varrho_1 h\cos\omega' + h^2}\,d\omega'$$

ist aber zwischen $\varrho_1 = 0$ und $\varrho = h$ gleich Null, dagegen $= 2\pi/\varrho_1$ zwischen $\varrho_1 = h$ und $\varrho_1 = \infty$; somit haben wir

$$U = 2^2 \pi \mu \int_{\varrho_1 = h}^{\varrho_1 = \infty} \frac{d\varrho_1}{\varrho_1^2} .$$

Wenn wir für ϱ_1 nach der Integration seine allgemeine Bedeutung beibehalten, können wir somit setzen

$$(31) \qquad U = 2^2 \pi \mu \frac{1}{\varrho_1} = 2^2 \pi \mu \frac{l - x}{(l-x)^2 + y^2} ,$$

worin x und y nunmehr irgend einen Punkt der Scheibe bezeichnen.

Die vorstehende Formel ist als eine erste Annäherung für die Berechnung der Erscheinung zu betrachten.

44. In dem im Vorstehenden untersuchten Falle entsprechen die Linien, längs deren die Induction gleich Null ist, den Linien gleichen elektrischen Zustandes; und zwar haben wir es mit dem in § 39 erwähnten Specialfall [**127**] zu thun; dieser aber besteht auch noch, wenn Magnete in beliebiger Anzahl vorhanden und nur dem vorstehenden durchaus ähnlich, das heisst normal zur inducirten Ebene angeordnet sind und dieselbe mit einem Pole berühren, während der andere Pol sich in unendlicher Entfernung befindet.

In der That ist, wenn wir die Coordinaten der Pole jener Magnete beziehungsweise mit

$$x_1, y_1; \; x_2, y_2; \; \ldots \; x_n, y_n$$

bezeichnen, die durch eine momentane Erregung der Magnete inducirte elektromotorische Kraft, wie man sich leicht überzeugen kann, durch die Gleichung

$$E = \int \left\{ \frac{k_1 a'(y_1 - y') - b'(x_1 - x')}{r_1^2} + k_2 \frac{a'(y_2 - y') + b'(x_2 - x')}{r_2^2} + \cdots \right\} ds'$$

ausgedrückt, in welcher $r_n^2 = (x_n - x')^2 + (y_n - y')^2$ zu setzen ist und k eine Constante bezeichnet, deren Betrag — allerdings nur für den Magnet, auf welchen sie sich bezieht — von der Magnetisirung und von dem vor der inducirten Ebene befindlichen Pole des Magnetes abhängt.

Um die durch die Rotation der Ebene inducirte elektromotorische Kraft E_1 zu finden, ist somit allgemein

$$x_n = l_n \cos \varphi_n , \quad y_n = l_n \sin \varphi_n$$

zu setzen und es ist in jedem der Ausdrücke, aus welchen sich die vorstehende Formel zusammensetzt und welche die Wirkung je eines der Magnete darstellen, der Winkel φ_n um denselben Betrag $d\varphi$ zu variiren; nach Ausführung dieser Differentiation erhält man

$$E_1 = d\varphi\, ds' \left\{ k_1 \left(a' \frac{T_1}{r_1^4} + b' \frac{V_1}{r_1^4} \right) + k_2 \left(a' \frac{T_2}{r_2^4} + b' \frac{V_2}{r_2^4} \right) + \cdots \right\},$$

worin

$$T_n = x_n(x_n - x') + 2y_n(y_n - y')(x_n - x') - x_n(y_n - y')^2,$$
$$V_n = y_n(y_n - y')^2 + 2x_n(x_n - x')(y_n - y') - y_n(x_n - x')^2$$

zu setzen ist; die allgemeine Differentialgleichung der Linien, längs deren die Kraft gleich Null ist, wird dann

$$\left(\sum' k_n \frac{T_n}{r_n^4} \right) dx' + \left(\sum' k_n \frac{V_n}{r_n^4} \right) dy' = 0,$$

[128] Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist nun die Function

$$c = \sum' k_n \frac{x_n(x_n - x') + y_n(y_n - y')}{r_n^2},$$

welche auch der Gleichung (16) genügt. So ist, entsprechend dem in § 39 Gesagten, wenn die inducirenden Magnete weit genug vom Rande der rotirenden Scheibe entfernt sind, der elektrische Zustand der inducirten Scheibe oder Ebene gleichfalls durch die Formel

$$U = \sum' k_n \frac{x_n(x_n - x') + y_n(y_n - y')}{r_n^2} \tag{32}$$

ausgedrückt.

Ist l_n die Entfernung des Pols eines beliebigen Magnetes vom Mittelpunkt, so haben wir

$$l_n^2 = x_n^2 + y_n^2,$$

und der Cosinus des Winkels zwischen r_n, der Entfernung eines Punktes $x'y'$ vom Pol des n-ten Magnetes, und l_n ist durch den Ausdruck

$$\cos(r_n, l_n) = \frac{x_n}{l_n} \cdot \frac{x_n - x'}{r_n} + \frac{y_n}{l_n} \cdot \frac{y_n - y'}{r_n}$$

dargestellt, so dass wir auch schreiben können

$$U = \sum l_n k_n \frac{\cos(r_n, l_n)}{r_n} .$$

Gehen wir nunmehr zur Erörterung der ersten zwei oder drei Fälle über, für deren Behandlung sich die Formel (32) eignet.

45. Im Falle eines einzigen Magnetes ist der elektrische Zustand, wie wir gesehen haben, durch die Formel

$$U = 2^3 \pi \mu \frac{l - x}{(l - x)^2 + y^2}$$

dargestellt und für die Linien gleichen elektrischen Zustandes haben wir die nämliche Gleichung wie für die Linien, längs deren die Kraft gleich Null ist, nämlich

$$(l - x)^2 + y^2 = 2\varrho_1 (l - x) .$$

Für die Linien maximaler Strömung besteht die Gleichung

$$(l - x)^2 + y^2 = 2\varrho_2 y .$$

[129] Die in jedem Punkte der Ebene inducirten Ströme haben dieselbe Richtung und Intensität wie die Ströme, welche denselben Punkt in Folge der an anderen Stellen erfolgenden Induction durchfliessen.

Die durch den Pol gehende Normale zur Verbindungslinie desselben mit dem Rotationsmittelpunkt ist der geometrische Ort zweier Systeme von Kreisen; eines derselben entspricht den positiven Werthen von y (und für diese ist die aus einer Integration stammende Constante ϱ_2 positiv), das andere System entspricht den negativen Werthen von y (und hier ist ϱ_2 negativ zu nehmen).

Diese beiden Systeme, welche sämmtlich durch den Pol gehen, berühren im Pole einander und die Polaraxe, das heisst die Axe, welche den Pol mit dem Rotationsmittelpunkt verbindet. Im vorliegenden Falle ist dies die x-Axe.

Die Richtungen der Ströme in den beiden Systemen sind einander entgegengesetzt; wo die beiden Systeme einander an der x-Axe begegnen, bewegen sie sich also im gleichen Sinne

und bilden ein Strombündel, welches unter dem Pol hindurchgeht; sie üben also eine elektrodynamische Wirkung aus, welche bei beiden Systemen dahin strebt, den Magnet im Sinne der Rotation der Ebene zu bewegen.

Die im Pole zur Polaraxe normale Linie ist eine Linie elektrischen Nullzustandes.

46. Befinden sich gegenüber der Scheibe zwei gleich starke Magnete mit ihren Polen auf der x-Axe und gleichweit vom Rotationsmittelpunkt entfernt, so ist in Gleichung (32)

$$-x_1 = x_2 = l, \quad y_1 = y_2 = 0, \quad k_1 = k_2 = k,$$

also

$$U = kl\left(\frac{l-x'}{r_1^2} + \frac{l+x'}{r_2^2}\right),$$

wobei

$$r_1^2 = (l-x')^2 + y'^2; \quad r_2^2 = (l+x')^2 + y'^2.$$

Aus den allgemeinen Werthen von

$$\frac{dU}{dx'} \quad \text{und} \quad \frac{dU}{dy'}$$

wäre nach der *Ohm*'schen Theorie zu entnehmen, dass die Ströme auch in diesem Falle für jeden der Magnete zwei Systeme oder Wirbel bilden, einen auf der Seite der positiven und den anderen auf der Seite der negativen y. Es sind also vier Wirbel vorhanden. Die Ströme in diesen Wirbeln sind für jeden Magnet von zwei entgegengesetzten Richtungen; auf der x-Axe, wo sie sich tangential berühren, bilden sie also unter dem Pole jedes Magnets ein Bündel von Strömen, welches sich längs dieser Axe bewegt; [**130**] und die elektrodynamischen Wirkungen der Wirbel, von denen der eine auf der Seite der negativen, der andere auf der Seite der positiven y-Werthe bleibt, summiren sich also und streben die Magnete in der Richtung der Ebene zu bewegen.

Die Nulllinien des elektrischen Zustandes sind in diesem Falle durch die Gleichung

$$l^2 = x^2 - y^2$$

bestimmt, es sind also gleichseitige Hyperbeln.

47. Im Falle zweier Magnete, die wie die vorigen, aber mit ihren ungleichnamigen Polen gegenüber der Scheibe angeordnet sind, haben wir

$$U = kl\left(\frac{l-x}{r_1^2} - \frac{l+x}{r_2^2}\right).$$

Die Schlüsse, welche sich aus dieser Gleichung ziehen lassen, sind denjenigen des vorigen Falles durchaus ähnlich, nur sind die Linien des elektrischen Nullzustandes durch die Gleichung

$$x(x^2 + y^2 - l^2) = 0$$

bestimmt. Die in der Mitte zwischen den Polen zur Polaraxe normale y-Axe ist also eine Linie elektrischen Nullzustandes; eine solche ist ferner der Kreis, welcher durch die Pole geht und dessen Radius gleich der Hälfte ihres Abstandes ist.

48. Wie man sieht, liesse sich die Discussion der Gleichung (32) fortsetzen, oder man könnte sich an den in § 39 bezeichneten Fall halten und die Gestalt der Ströme auch für die bei Unterbrechung und Schliessung des Volta-Stromkreises stattfindende Induction zu bestimmen suchen; uns genügt es jedoch, diesen zweiten Fall benützt zu haben, um an einem Beispiel zu zeigen, auf welche Weise inducirte Ströme vorhanden sein können, ohne dass in einem Leiter ein variabler elektrischer Zustand existirt. So sind die Ströme, welche einen Punkt dieses inducirten Körpers durchfliessen, weil sie von der Ausbreitung der an anderen Stellen des Körpers inducirten Ströme herrühren, wohl von den an der betreffenden Stelle selbst inducirten zu unterscheiden[1]).

Einstweilen sei bemerkt, dass die Erklärung der elektrodynamischen Wirkungen, welche in den behandelten Fällen zu Stande kommen, in der Gestalt der vorerwähnten Wirbel und nicht in dem Bündel von Strömen, welche die Ebene unterhalb des Poles längs der Polaraxe durchfliessen, zu suchen ist. Dass jene elektrodynamischen Vorgänge bei Strömen oder Wirbeln von solcher Gestalt eine derartige Wirkung hervorbringen müssen, lässt sich, wie dies [131] zuerst Prof.

---

[1]) Die Verteilung des elektrischen Zustandes bezieht sich auf die erste Art von Strömen.

Matteucci für die rotirende Scheibe von *Arago* gethan hat[1]), immer beweisen.

Es bliebe jedoch zu untersuchen, ob das Gesetz, nach welchem jene elektrodynamischen Wirkungen bei Aenderung des Abstandes zwischen dem Magnet und dem Rotationsmittelpunkte variiren, der Erfahrung entspricht.

49. Will man die Erscheinung genauer untersuchen, so ist zu berücksichtigen:

1. die Zeit, deren die inducirende Kraft zur Entwicklung der elektromotorischen Kraft bedarf;
2. die Dauer dieser Kraft, das heisst die Zeit, welche dieselbe zum Verschwinden beansprucht.

Hier würden wir jedoch auf Betrachtungen kommen, welche, so wahrscheinlich sie auch sein mögen, doch immer einen hypothetischen Charakter haben. Immerhin muss man bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft zugeben, dass die besagten Zeiten zwar klein, aber gleichwohl von merklicher Dauer sind; man muss sie deshalb als Thatsachen hinnehmen und die Schlussfolgerungen, welche sich aus ihnen ergeben, in der Theorie acceptiren. Herr *Verdet* hat durch seine schönen Versuche über die Induction einen derartigen Einfluss der Zeit unwiderleglich nachgewiesen. Und Prof. *Matteucci* hat in den obenerwähnten Vorlesungen letzthin lediglich mit Hilfe der *Arago*'schen Scheibe vermittels der Ströme, welche in einem Galvanometer auftreten, wenn man an dieser inducirten Scheibe die Gleitcontacte anbringt, dasselbe gezeigt.

Bei der allgemeinen Erscheinung macht sich, so lange die relative Geschwindigkeit nicht sehr gross ist, dieser Umstand oder der Einfluss der Zeit nur in nebensächlichem Grade bemerkbar und kann bei einer ersten allgemeinen Untersuchung des Phänomens vernachlässigt werden. Wir hielten es nicht für angebracht, die Formeln, die für einen Vergleich mit den Versuchsergebnissen schon sehr complicirt sind, fürs erste und ohne unmittelbaren Zweck noch complicirter zu machen.

50. Wenn wir bei der Anwendung des Verfahrens zur Bestimmung der Ausbreitung der in einem Körper von beliebiger Gestalt durch eine elektromotorische Kraft, deren Aenderung als bekannt vorausgesetzt wurde, inducirten Ströme nur die Formel (3′) benutzt haben, so geschah dies nicht etwa, weil wir uns dazu unmittelbar durch den Versuch berechtigt glaubten.

[1]) Cours spécial, p. 113.

Damals hatte der Versuch noch nichts entschieden, seine Ergebnisse sprachen noch nicht zu Gunsten oder Ungunsten einer solchen Verallgemeinerung; wir wollten dieselbe lediglich auf ihre Zulässigkeit prüfen.

In Wirklichkeit stehen die bis jetzt von uns erhaltenen Resultate mit den bezüglich der Richtung der inducirten Ströme bekannten Thatsachen in Uebereinstimmung. Das heisst die elektrodynamischen Wirkungen, welche nach unseren Rechnungen zu Stande kommen müssen, haben die gleiche Richtung wie diejenigen, deren Auftreten dem Versuche nach bekannt ist.

Einstweilen würde es offenbar, so lange die Ergebnisse dieser Verallgemeinerung mit dem Versuche in Uebereinstimmung gefunden werden, zum mindesten jedem gesunden philosophischen Principe widersprechen, wenn man rein hypothetische Formeln verfolgen wollte.

[**132**] 51. Vielleicht wird man uns entgegenhalten, dass wir bereits Theorien der Induction besitzen, welche nicht allein die auf geschlossene und lineare Stromkreise bezüglichen Erscheinungen umfassen, sondern sich auch auf offene Stromkreise anwenden lassen und die Erklärung einer Thatsache geben, welche in den bis dahin aufgestellten Formeln nicht enthalten ist.

Jene Theorien rühren von den Herren *Weber* und *Neumann* her und die Erscheinung, um welche es sich handelt, ist diejenige, welche *Weber* als unipolare, *Matteucci* als axiale Induction bezeichnet hat und welche gemeinhin in Gestalt der Ströme bekannt ist, die man beobachtet, wenn man einen Magnet um seine Axe rotiren lässt und von den zum Galvanometer führenden Drähten den einen auf der Mitte, den anderen auf einem Pole des Magnetes festhält.

Hätten wir bei unseren bescheidenen Kräften geglaubt, dass die Formeln jener Theorien wirklich der Formel (3′) so sehr überlegen seien, so hätten wir es vorgezogen, dieselben probeweise zu verfolgen. Indess schien uns für den Augenblick keine derselben geeignet, die beschriebene von einem rotirenden Magnet dargebotene Erscheinung zu umfassen; ferner ist zu berücksichtigen, dass diese Theorien unter einander wesentlich verschieden sind und, wenn sie auch so Manches mit einander gemein haben (die *Ampère*'sche Formel), doch in den allgemeinen Fällen nicht gleichzeitig richtig sein

können. Schliesslich sind dieselben auch vollständig hypothetischer Natur.

Uebrigens würden wir durch die Annahme der einen oder anderen dieser Theorien dem bescheidenen Verdienste dieser Arbeit nicht zu schaden geglaubt haben. Denn hier handelt es sich nicht darum, zu errathen, sondern darum, aus dem Experimente das Richtige herauszufinden; und wir würden reichlich befriedigt gewesen sein, wenn wir dazu gelangt wären, die Richtigkeit der einen oder anderen Theorie darzuthun.

Die Arbeiten jener beiden hervorragenden mathematischen Physiker sind von hohem Werthe; sie sind es in solchem Maasse, dass ihr Studium, auch wenn es bewiesen wäre, dass keine von ihnen der Wahrheit entspricht, um der vielen darin enthaltenen geistreichen Betrachtungen willen immer noch für jeden von hohem Nutzen wäre, der dieses schwierige Gebiet der Physik zu fördern wünscht. Will aber der experimentelle Physiker, wie es seine Pflicht ist, sich an das halten, was mit aller Strenge bewiesen und gegen jeden vernünftigen Einwand geschützt ist, so steht ihm keine andere Theorie der Induction zur Verfügung als die auf lineare Stromkreise bezügliche, und, wenigstens für den Augenblick, kein anderes Beweisverfahren als das von *Ampère* angegebene und in unserer ersten Abhandlung befolgte. Will man dann dem Geiste einen freieren Spielraum über sämmtliche allgemeinen Erscheinungen der Induction gestatten, so darf man doch nicht bald auf das *Lenz*sche Gesetz, bald auf *Neumann*, bald wieder auf *Weber* greifen, denn es ist nichts weniger als bewiesen, dass alles dies gleichzeitig wahr sein müsse; die Förderung der Wissenschaft hat vielmehr durch ein eingehenderes Studium des Problems zu erfolgen.

Einige Zeit nach den ersten Arbeiten des Herrn *Faraday* über die elektrodynamische Induction veröffentlichte Herr *Lenz* eine Abhandlung, in welcher er nach Beschreibung verschiedener höchst eleganter Versuche das folgende Gesetz aufstellte:

»Die Richtnng des Stromes, welcher in einem linearen [**133**] Leiter durch relative Bewegung desselben mit Bezug auf einen Magnet oder einen Volta-Stromkreis inducirt wird, ist immer gleich[1]) derjenigen eines Stromes, welcher, falls er

[1]) Im Original heisst es irrthümlicherweise: »entgegengesetzt«.

in dem inducirten Leiter vorhanden wäre, in diesem letzteren eine Bewegung hervorrufen könnte, welche der die Induction verursachenden genau entgegengesetzt wäre«.

Dieses Gesetz, welches für den Fall linearer Stromkreise als Hilfsmittel zur Bestimmung der Richtung des inducirten Stromes im Stromkreise aufgestellt wurde, ist bis jetzt stets mit der Erfahrung in Uebereinstimmung befunden worden und umfasst auch den Fall der sogenannten unipolaren Induction.

In der That zeigt ein Galvanometer, dessen Drahtenden man auf einem um seine Axe rotirenden cylindrischen oder stabförmigen Magnet, und zwar das eine zwischen den Polen und das andere an einem Ende des Magnets, gleiten lässt, einen Strom an; und die Richtung dieses Stromes ist eine derartige, dass sie dem Magnet die entgegengesetzte Drehung wie die bei dem Versuche stattfindende ertheilen würde, falls der Stromkreis des Galvanometers ein durch den Magnet geschlossener Volta-Stromkreis wäre; man erhielte so die bekannte Erscheinung der Rotation von Magneten durch Volta-Ströme, welche entweder durch den Magnet selbst gehen, oder auch durch einen von ihm isolirten Leiter, der aber fest mit ihm verbunden ist und mit ihm rotirt, während die übrigen Theile des Stromkreises in Ruhe bleiben.

Bezüglich dieses Versuches mag man das citirte Buch von Prof. *Matteucci*, die Abhandlungen der Herren *Faraday* und *Lenz*, sowie die von Prof. *L. Pacinotti* im Jahrgang 1844 der in Pisa erscheinenden Zeitschrift »Il Cimento« publicirte Abhandlung nachsehen.

Lange Zeit nach der Arbeit des Herrn *Lenz* stellte Herr *Neumann* eine Theorie der Induction in linearen Stromkreisen auf, welche von dem folgenden hypothetischen Grundsatze ausgeht:

»Die von einem Element eines Volta-Stromkreises in einem anderen im natürlichen Zustande befindlichen linearen Elemente inducirte elektromotorische Kraft ist proportional der elektrodynamischen Kraft, welche zwischen den beiden Elementen bestehen würde, falls das zweite, nämlich das inducirte, von einem elektrischen Strome durchflossen wäre und diese Kraft nach der Richtung der Geschwindigkeit des inducirten Elementes zerlegt würde«.

Die Abhandlung des Herrn *Neumann* giebt Resultate, welche für alle Fälle geschlossener und linearer Stromkreise mit der Erfahrung in Uebereinstimmung stehen.

Da Herr *Lenz* nicht von der Intensität, sondern von der Richtung von Strömen spricht, so kann sein Gesetz vollkommen richtig und gleichzeitig das Fundamentalprincip des Herrn *Neumann* falsch sein. Uebrigens könnte das *Lenz*'sche Theorem, obschon es durch Analogie an Distanzwirkungen erinnert, doch mit den Thatsachen übereinstimmen, auch wenn die Inductionserscheinungen weder sämmtlich noch theilweise von ausschliesslichen Distanzwirkungen bedingt wären.

Suchen wir indess jetzt die Erscheinung der Induction durch Magnete, welche um ihre Axe rotiren, in Kürze und wo möglich ohne Rücksichtnahme auf irgend eine Theorie zu analysiren.

52. [**134**] Drei Dinge sind an dem zur Vorführung dieser Erscheinung dienenden bekannten Apparat hauptsächlich zu betrachten:

1. Der um seine Axe bewegliche cylindrische Magnet.

2. Der sogenannte innere Theil des Stromkreises des Galvanometers; derselbe kann fest mit dem Magnet verbunden sein und mit demselben rotiren, oder auch in Ruhe bleiben, während der Magnet rotirt. Im ersten Falle kann der Magnet selbst diesen Theil vertreten.

3. Der sogenannte äussere Theil des Stromkreises des Galvanometers; derselbe kann mit dem Magnet rotiren, während der innere Theil in Ruhe verharrt, oder er kann umgekehrt mit dem Magnet in Ruhe verbleiben, während der innere Theil sich bewegt.

Es rotire nun der äussere Theil des Stromkreises, der Rest bleibe unbeweglich. Das Galvanometer zeigt einen Strom an und die Richtung desselben im Stromkreise entspricht dem *Lenz*'schen Gesetze.

Es rotire der innere Theil; der äussere Theil und der Magnet seien unbeweglich. Man erhält einen Strom und seine Richtung entspricht auch in diesem Falle dem *Lenz*'schen Gesetze. Bis hierher stimmt also Alles und wir erheben gegen das *Lenz*'sche Gesetz keinen Einwand, wofern dasselbe nur die allgemeine Richtung des Stromes im Stromkreise angeben will, nicht aber die Stelle, an welcher derselbe erregt wurde.

Wer aber will, dass die Erscheinung ausschliesslich durch Distanzwirkungen zwischen dem Magnet und dem linearen Stromleiter bedingt sei, den dürfen wir auch fragen, wo die elektromotorische Kraft erregt wird. Nach den Physikern,

welche sich den erwähnten Theorien anschliessen, würde in diesem letzteren Falle der Strom im inneren Theile inducirt. Wenn dies aber richtig ist, so muss man, falls der Magnet mit dem inneren Theile um seine Axe rotirt, die Annahme machen, dass der Strom in dem unbeweglich bleibenden Reste des Stromkreises inducirt wird, weil es ein Widersinn wäre, wenn man behaupten wollte, der Strom würde auch in diesem Falle noch im inneren Theile inducirt. Es folgt daraus, dass man nothwendigerweise, wenn man für die Theorie des Phänomens lediglich die Distanzwirkungen zwischen einem beliebigen Elemente des inducirten Stromkreises und dem Magnet in Rechnung stellen will, die Ursache in der relativen Rotationsbewegung zwischen einem beliebigen inducirten Elemente und dem Magnet zu suchen hat. Richtig ist allerdings, dass bei den Gesetzen der Erscheinung hervorgehoben wurde, dieselbe hänge nur von der relativen Bewegung der beiden Theile des inducirten Stromkreises ab; aber zu diesem Schlusse gelangte man nicht etwa, weil diese Unabhängigkeit in Rechnung gestellt wurde, sondern weil die — übrigens wenigstens innerhalb gewisser Grenzen richtige — Annahme gemacht wurde, der inducirte Strom sei nur der ersten Potenz der erwähnten relativen Geschwindigkeit proportional [1]); theoretische Grundlage blieb aber immer, dass [**135**] der in einem beliebigen Elemente inducirte Strom von der besagten relativen Geschwindigkeit abhängig sei.

Wenn aber diese letzte Behauptung richtig wäre, so müsste in einem beliebigen, nicht mehr linearen Leiter lediglich in Folge der Rotation des Magnets um seine Axe, auch wenn der Leiter nicht aus zwei aufeinander gleitenden Theilen bestände, ein System von inducirten Strömen zu Stande kommen. Denn wenn man nach den erwähnten Theorien durch eine derartige Rotation in einem geschlossenen, linearen und unbeweglichen Stromkreise nichts erhält, so ist dies nicht etwa der

---

[1]) Nothwendigerweise musste angenommen werden, der in einem beliebigen von den beiden Theilen, sei es dem äusseren oder dem inneren, inducirte Strom hänge lediglich von der Rotationsgeschwindigkeit dieses Theiles mit Bezug auf den Magnet ab; da aber seine Stärke nur der ersten Potenz dieser Geschwindigkeit proportional angenommen wurde, so blieb nach dieser Hypothese, nachdem die Rotation des Magnets die Differenz zwischen den Geschwindigkeiten jener beiden Theile mit Bezug auf den Magnet nicht beeinflusste, der Strom im Galvanometer unverändert.

Fall, weil die Induction in jedem beliebigen Punkte für sich allein gleich Null wäre, sondern weil die inducirten Ströme in Folge der linearen Gestalt des Leiters längs des Stromkreises, der alle an den verschiedenen Stellen, an seinen sämmtlichen Punkten inducirten Ströme zu summiren gezwungen ist, sich gegenseitig aufheben. In einem Körper von beliebiger Gestalt besteht diese Nothwendigkeit nicht mehr und die elektrodynamischen Wirkungen zwischen ihm und dem Magnet sollten deshalb das Vorhandensein derartiger Ströme anzeigen. Bis jetzt hat man jedoch solche Wirkungen vergeblich gesucht; und es ist deshalb zu schliessen, dass die geschilderte relative Bewegung nicht die Ursache der Erscheinung bildet [1]).

Das *Lenz*'sche Gesetz hatte zur Folge, dass sich vielleicht so manche Physiker betreffs der Ursache der Induction einer Täuschung hingaben; es ist zu bemerken, dass dieses Gesetz nur die Richtung des Stromes in dem bewegten Leiter bestimmen kann, mag der Strom nun wirklich in dem Theile des Stromkreises, welcher sich in Bewegung befindet, erregt sein oder nicht.

53. Nur eine eingehendere experimentelle Prüfung vermag die Frage zu entscheiden; wahrscheinlich wird sie uns dann sagen, welches der bis jetzt vernachlässigte Umstand ist, welcher jenen erwähnten besonderen Fall der Induction verursacht. Vielleicht ist eine derartige neue Grundthatsache in der beständigen Aenderung der Berührungspunkte der beiden Theile des Stromkreises gegenüber dem Magnet zu suchen.

Die in der ersten Abhandlung von uns bewiesene Formel (3′) kann die unipolare Induction nicht umfassen; in der That kann man von derselben nicht die Theorie einer Erscheinung verlangen, wenn der für die Entstehung dieser Erscheinung wesentliche Umstand sich nicht in den Grundthatsachen vorfindet, auf welche diese Formel aufgebaut ist. Jetzt aber, wo wir mit der Formel (3′) die Theorie der Induction in den linearen Stromkreisen besitzen, und wo die Ausdehnung derselben Formel auf den allgemeinen Fall in Folge der ausserordentlichen Uebereinstimmung ihrer Folgerungen mit den Versuchsergebnissen in hohem Grade wahrscheinlich, wenn nicht sicher geworden ist, müssen wir danach streben, mittelst klarer Experimente den für die unipolare Induction wesentlichen Umstand in die Theorie einzuführen und diese auf

[1]) S. *Matteucci*, Cours spécial, p. 82.

solche Weise nach und nach, indem wir gleichen Schrittes mit dem Experiment vorgehen, zu vervollständigen.

Eine ausführlichere Erörterung dieses besonderen Falles müssen wir uns auf eine andere Gelegenheit aufsparen. Für jetzt bleibt uns nur zu sagen, dass die bereits Jedermann bekannten Versuche, zusammen mit den von uns angestellten, die Erscheinung in den folgenden Sätzen zusammenfassen lassen.

[136] 1. An der Berührungsstelle zweier Leiter, die in Gegenwart eines Magnetes aufeinander gleiten, entwickelt sich eine normal zu dem von der Berührungsstelle beschriebenen Flächenelement do gerichtete elektromotorische Kraft.

2. Diese Kraft, die sich in einem Zeitelement dt entwickelt, ist gleich der elektromotorischen Kraft, welche in do nach der Bewegungsrichtung durch eine momentane Magnetisirung inducirt werden könnte.

3. Die Richtung dieser Kraft geht vom Berührungspunkte aus nach dem Innern eines beliebigen der Leiter oder umgekehrt, je nachdem der betrachtete Leiter sich im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne bewegt, wie der Strom, welcher durch eine momentane Magnetisirung des inducirenden Magnetes in do inducirt werden könnte.

Diese Sätze zeigen, dass man, wenn man eines der Drahtenden eines Galvanometers längs einer beliebigen Curve auf einem Leiter gleiten lässt, im Galvanometer die gleiche Summe von elektromotorischen Kräften erhält, welche man auch erhalten würde, wenn man längs derselben Curve einen Leitungsdraht abwickelte. Wie wir später sehen werden, lässt sich dies leicht nachweisen.

54. Wir dürfen somit schliessen,

1. dass bis jetzt nur die Formel (3′) in aller Strenge durch den auf lineare Leiter bezüglichen Versuch gegeben ist;
2. dass jedoch die Ausdehnung der Formel (3′) auf den allgemeinen Fall der Induction in einem Körper von beliebiger Gestalt bis jetzt zu Resultaten geführt hat, welche mit den Versuchsergebnissen übereinstimmen;
3. dass die wesentliche Bedingung der axialen Induction sich nicht unter den Thatsachen findet, welche der Formel (3′) zu Grunde liegen, und dass somit diese Formel die Theorie der betreffenden Erscheinung nicht zu geben

vermag. Mit anderen Worten können wir auch sagen, dass diese Formel nicht im Stande ist, die Richtung und Intensität der elektromotorischen Kraft zu bestimmen, welche in einem Element eines Körpers inducirt wird, innerhalb dessen die Berührungsstellen der Theile, aus welchen derselbe besteht, fortwährenden Aenderungen unterliegen;

4. dass die Formel (3′) auf den Fall der durch die Leydner Flasche inducirten Entladungen anwendbar ist.

Ueber die mathematische Theorie der elektrodynamischen Induction.

Von

Riccardo Felici[1]).

Dritte Abhandlung.

[5] 55. Am Schlusse der zweiten Abhandlung sagten wir, dass die Formel (3′) zur Bestimmung der im Falle der sogenannten unipolaren oder axialen Induction inducirten elektromotorischen Kräfte für sich allein nicht ausreiche, das heisst, dass die Daten, aus welchen die Formel (3′) gewonnen wurde, oder auf welche sich ihre Anwendung für die Induction im Falle der relativen Bewegung der Stromkreise gründete, den erwähnten Specialfall nicht umfassen. Nunmehr werden wir aber eine neue experimentelle Thatsache beweisen, welche uns im Verein mit den bereits bekannten das Verfahren liefern wird, um mittels der Formel (3′) den allgemeinsten Fall der inducirten Ströme, welche durch die relative Bewegung zweier Theile eines und desselben Stromkreises entstehen können, der Rechnung zu unterziehen; in diesem allgemeinen Falle ist dann die unipolare Induction als Specialfall enthalten.

Auf diese Weise wird in unseren drei Abhandlungen aus der einzigen überaus einfachen Formel (3′) die gesammte Theorie der Induction experimentell abgeleitet werden.

56. Wir geben eine kurze Uebersicht über die Versuche, von den einfachsten und gewöhnlichsten bis zu den allgemeinsten.

(*a*) Es sei ein cylindrischer, auf einem Rotationsapparat angebrachter Magnet, sowie ein Galvanometer für thermoelektrische Ströme gegeben, und es mögen die beiden Con-

[1]) Aus den Annali della Università Toscana, t. IV, 2. Theil 1855.

tacte des Galvanometers (die der Bequemlichkeit halber aus kleinen messingnen oder kupfernen Federn bestehen können) an zwei Stellen des Magnets, die verschiedenen Querschnitten desselben angehören, gebracht werden. Während die Contactfedern unbeweglich bleiben, lasse man den Magnet um seine geometrische Axe rotiren; die Rotation mag im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne erfolgen wie diejenige der von *Ampère* zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen angenommenen Ströme. Man erhält so einen Strom, der sich im Galvanometer bemerkbar macht, und seine Richtung ist in der in § 52 angegebenen Weise bestimmt.

[6] (*b*) Man nehme eine Scheibe aus leitendem Material und bringe ihren Mittelpunkt in die Verlängerung der Axe des Magnets, welcher normal zu ihr gerichtet und nicht weit von ihr entfernt sei. Die Contactfedern werden an zwei ungleich weit vom Mittelpunkt der Scheibe entfernten Stellen mit dieser in Berührung gebracht. Die Scheibe wird um ihre Axe in Rotation versetzt, wobei, wie vorhin, die Contactfedern unbeweglich bleiben; es entsteht ein inducirter Strom, dessen Richtung dem *Lenz*'schen Gesetze entspricht. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dass die beiden Contactfedern sich auf dem gleichen Radius der Scheibe befinden, und wir stellen uns vor, es sei ein Draht von der Länge des Abstandes der Federn zwischen denselben ausgespannt. Die Richtung des in der bewegten Scheibe inducirten Stromes, so behaupten wir, ist dann eine derartige, dass die elektrodynamische Wirkung, welche zwischen dem von jenem Strome durchflossenen Drahte und dem inducirenden Magnet zu Stande kommen könnte, dem Drahte eine der Drehung der Scheibe entgegengesetzte Rotation um die Axe des Apparates zu ertheilen streben würde. Man beachte jedoch, dass die Intensität und Richtung des Stromes sich nicht ändert, so lange die beiden Contacte ihre Abstände vom Mittelpunkte beibehalten, welches auch ihre Entfernung von einander sein mag.

(*c*) Werden die Scheibe und der Magnet auf derselben Rotationsaxe befestigt, so kann man beide gleichzeitig, wie einen einzigen Körper in Drehung versetzen; Intensität und Richtung des Stromes sind dann dieselben wie im Versuche (*b*). Wir machten jedoch in § 52 darauf aufmerksam, dass man, wenn man auch in diesem Falle dem *Lenz*'schen Gesetze folgen und nicht allein die Richtung des Stromes, sondern auch die Erregungsstelle der elektromotorischen Kräfte

finden will, mit *Neumann* die Annahme machen muss, es könne in einem unbeweglichen Element eines Leiters durch Rotation eines cylindrischen Magnetes um seine geometrische Axe eine elektromotorische Kraft inducirt werden — eine Annahme, welche, wie wir bereits in dem erwähnten Paragraphen sagten, zu Folgerungen führt, die mit den Versuchsergebnissen in Widerspruch stehen.

(*d*) Es lässt sich feststellen, dass der Strom im Versuche (*a*) der Rotationsgeschwindigkeit des Magnets, im Versuche (*b*) der Geschwindigkeit der Scheibe und im Versuche (*c*) der relativen Geschwindigkeit des Galvanometerstromkreises mit Bezug auf den Magnet proportional ist. Und wenn die Scheibe und der Magnet um dieselbe Axe, aber nicht mit einander verbunden, mit verschiedenen Geschwindigkeiten und in verschiedenen Richtungen rotiren, so findet man den Strom proportional der Differenz zwischen den beiden bezüglichen Geschwindigkeiten, der Geschwindigkeit der Scheibe und derjenigen der Gleitcontacte oder des Galvanometerstromkreises. Und diese Proportionalität besteht auch dann noch, wenn alles in der Weise angeordnet ist, dass auch die Gleitcontacte thatsächlich um die Axe des Magnets rotiren; man findet dann, dass die Rotation des Magnets den inducirten Strom nicht beeinflusst, weil die vorbezeichnete Differenz durch seine Rotation nicht verändert würde. Vielleicht sind einige Physiker bei Beobachtung dieser letzten Versuchsanordnung in einen Irrthum verfallen und haben dem *Lenz*'schen Gesetze eine allgemeinere Bedeutung zugeschrieben, als sie ihm nach den Versuchen, aus welchen dasselbe hervorgegangen ist, zugeschrieben werden darf.

[7] (*e*) Endlich lässt sich in jenen Versuchen leicht feststellen, dass der Strom von der Gestalt des inducirten Stromkreises unabhängig ist. Derselbe hängt auch nicht von der Gestalt der Scheibe oder des mit den Gleitcontacten oder gesondert von denselben rotirenden Leiters ab. In der That kann man die Scheibe auf alle mögliche Weise zurechtschneiden; der Strom bleibt unverändert, wenn man nur Sorge dafür trägt, dass derselbe von einem Gleitcontact zum anderen gelangen kann; oder wenn wirklich in Folge der Zunahme der reducirten Länge des ganzen Stromkreises durch das beschriebene Zerschneiden eine Aenderung der Stromintensität eintritt, so ist dieselbe nur gering. So kann man anstatt der beschriebenen Scheibe eine Kugelfläche, eine quadratische oder dreieckige Fläche benutzen.

57. Bei den Versuchen, welche den Formeln der ersten Abhandlung zur Grundlage dienten, besteht die Ursache der Erscheinung oder besser gesagt der für das Zustandekommen derselben wesentliche Umstand in der Aenderung der relativen Lage der Elemente des inducirten Stromkreises mit Bezug auf diejenigen des inducirenden; bei den vorstehenden Versuchen dagegen findet keine derartige Lagenänderung, sondern nur eine Rotationsbewegung des Elementes um die Axe des cylindrischen Magnetes statt; um aber nicht allein den Versuch (*e*), sondern auch die Versuche (*a*), (*b*), (*c*) und (*d*) erklären zu können, müsste diese Bewegung den gleichen Effect hervorbringen, mag sie nun absolut oder relativ sein, das heisst, mag das Element oder der Magnet rotiren; und das kann, wie wir sahen, nicht angenommen werden. Welches ist also der für die Erscheinung wesentliche Umstand?

Suchen wir nicht zu errathen; beschreiben wir lieber die Versuche, deren Ergebnisse, algebraisch ausgedrückt, uns die allgemeinen Formeln liefern, mittels deren sich nicht nur die Ergebnisse der im Vorstehenden beschriebenen Versuche darstellen lassen, sondern auch ein allgemeiner Fall, der im Speciellen und unabhängig von jeder Hypothese sogar die zuletzt beschriebenen Versuche umfasst.

58. Gehen wir auf den Versuch (*b*) zurück und bezeichnen wir der Kürze und Klarheit halber mit δ die Differenz zwischen den Entfernungen der Gleitcontacte des Galvanometers vom Mittelpunkt der Scheibe, mit D den mittleren Abstand derselben vom Mittelpunkt der Scheibe, so dass also, wenn d_1 und d_2 die Abstände der beiden Gleitcontacte vom Mittelpunkt bezeichnen, die Gleichungen

$$\delta = d_1 - d_2,$$
$$D = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

bestehen.

(*f*) Lässt man in dem Versuche (*b*) die Scheibe rotiren und erhält δ constant, während D variirt, so bekommt man successive Ströme von verschiedener Intensität. Ist der Magnet hinreichend stark und die Scheibe gross genug, so lässt sich die Erscheinung mit grosser Genauigkeit untersuchen. Ich benutzte einen temporären Magnet, dessen Länge 20 cm und dessen Durchmesser mitsammt der Spirale 12 cm betrug und [8] der 1 cm von der Scheibe entfernt war; ich hatte acht

Bunsen-Elemente zur Verfügung. Es war einer der *Ruhmkorff*'schen cylindrischen Elektromagnete, wie sie zu dem *Faraday*'schen Versuche über die Wirkung des Magnetismus in durchsichtigen Substanzen benutzt werden.

Setzt man unseren Versuch fort, so wird man beobachten, dass bei Zunahme von D und wachsender Entfernung vom Mittelpunkt die Ströme im Allgemeinen an Intensität abnehmen; bei constantem δ wird für einen gewissen Betrag von D der Strom gleich Null sein; bei weiterer Zunahme von D wird dann der Strom von neuem auftreten, aber in entgegengesetzter Richtung wie vorher, als D kleiner war. Lässt man D noch weiter zunehmen, so wird die Intensität der Ströme wachsen, aber im Allgemeinen wird die Scheibe nicht gross genug sein, um die Beobachtung zu gestatten, dass mit zunehmendem D die Ströme schliesslich abnehmen und nach und nach wieder zu Null werden. Unter den angegebenen Bedingungen, unter welchen ich den Versuch anstellte, war $\delta = 6$ cm; für $d_1 = 19$ und $d_2 = 13$ cm erhielt ich einen sehr starken Strom, der bei demselben Werthe von δ für $d_1 = 15$ und $d_2 = 19$ cm seine Richtung umkehrte, aber immer noch sehr stark blieb. Es versteht sich, dass die mehr oder minder rasche Rotation der Scheibe auf die Intensität, nicht aber auf die Richtung der Ströme von Einfluss ist.

Bei diesem letzten Versuche haben die Gleitcontacte auf der Scheibe eine Anzahl concentrischer Kreise beschrieben. Man halte nunmehr die Scheibe fest, bringe dagegen auf derselben längs zweier beliebiger von den gleichzeitig von den Gleitcontacten beschriebener Kreise einen seidenumsponnenen Kupferdraht in der Weise an, dass im Galvanometer die Differenz zwischen den beiden Strömen erhalten wird, welche diesmal durch momentane Schliessung des den Elektromagnet magnetisirenden Volta-Stromes in den beiden Kreisen inducirt werden. Wiederholt man diesen neuen Versuch für alle Paare von Kreisen, welche gleichzeitig von den Gleitcontacten beschrieben wurden, so erhält man eine neue Art von Strömen, welche beziehungsweise den vorher durch die Rotation der Scheibe erhaltenen proportional sein werden und für denselben Werth von D verschwinden und ihr Vorzeichen wechseln.

Die auf den Fall der momentanen Magnetisirung bezüglichen Formeln sind aus der ersten Abhandlung bereits bekannt und der vorstehende Versuch liefert nunmehr die For-

meln zur Berechnung der Versuche (*b*), (*c*), (*d*) und (*e*); wir gehen jedoch sofort zur Beschreibung eines anderen Versuches über, der viel einfacher als der vorstehende und zur Aufstellung möglichst allgemeiner Formeln geeignet ist.

59. (*g*) Mittels eines gut ausgeglühten und mit Seide übersponnenen, hinreichend aber nicht allzu dünnen und zu leicht zerreissbaren Kupferdrahtes stelle man eine enge Spirale her, welche eine beträchtliche Drahtlänge, etwa 2—3 m, in einem kleinen Raume vereinigt. Man sorge dafür, die Anordnung so zu treffen, dass durch Ziehen am einen Ende der Draht rasch abgewickelt werden kann, während die Spirale an Ort und Stelle und das andere Ende des Drahtes mit dem Galvanometer in Verbindung bleibt; dabei soll, während ein Theil des Drahtes abgewickelt wird, der Rest der Spirale weder gelockert noch deformirt werden. Das eine Ende des Drahtes [9] hat so als einer der Gleitcontacte des Galvanometers zu dienen. Endlich soll die Spirale so orientirt werden, dass durch eine momentane Erregung des inducirenden Elektromagneten kein Strom in derselben entsteht.

Nachdem alles auf diese Weise angeordnet ist, lässt man den Gleitcontact des Galvanometers, welcher zugleich das Ende der Spirale bildet, auf einer leitenden Fläche, welche unter der Einwirkung des Magnets steht und mit dem Galvanometer in Verbindung ist, eine beliebige Curve beschreiben; dabei soll alles derart geregelt sein, dass der Draht bei seiner Abwickelung von der Spirale sich genau auf die von seinem Ende beschriebene Curve legt und somit in jedem Augenblick mit seiner eigenen Curve die Spur der vorbeschriebenen Curve darstellt. Wäre diese letztere Curve etwa ein Kreis, so brauchte man nur auf die leitende ebene Fläche eine runde Scheibe zu legen und dann den Gleitcontact oder das Ende der Spirale in Berührung mit der Scheibe über die leitende Fläche zu führen und dabei gleichzeitig den Draht um die Scheibe zu wickeln. Die Scheibe kann normal zur Axe eines cylindrischen Magnets und mit ihrem Mittelpunkte auf dieser Axe angeordnet sein und ein Rotationsapparat kann auf bequeme und doch zugleich genaue und rasche Weise die Bewegung des Gleitcontactes besorgen.

Das Resultat dieses Versuches ist auf alle Fälle immer das gleiche: das Galvanometer zeigt niemals einen Strom an. Analysiren wir nunmehr diesen Versuch.

60. Der Draht der Spirale geht bei dem Versuche (*g*) von

einer Lage aus, in welcher der durch eine momentane Magnetisirung in ihm inducirte Strom gleich Null sein würde; aus dieser Lage geht er in eine andere über, in welcher bei geeigneter Anordnung dieselbe momentane Magnetisirung einen starken Strom in ihm induciren würde. Danach ist aus der ersten Abhandlung sowie aus den bereits angestellten Versuchen zu entnehmen, dass die Summe der beim Uebergang des Drahtes aus der ersten in die zweite Lage inducirten elektromotorischen Kräfte gleich derjenigen Kraft ist, welche durch die gleiche momentane Magnetisirung in demselben Drahte inducirt werden könnte, wenn derselbe sich unbeweglich in der zweiten Lage befände. Dieser Schluss unterliegt keinem Zweifel; der grösseren Klarheit halber wollen wir ihn jedoch in einem besonders leichten Falle aufs Neue einer experimentellen Prüfung unterziehen.

(*h*) Der inducirende Magnet sei ein Cylinder und das Ende der Spirale werde auf einer Scheibe befestigt, deren Mittelpunkt sich wie vorhin auf der Axe des Magnetes befindet und welche mit diesem in Rotation versetzt werden kann; die Scheibe kann wenigstens zum Theil aus leitendem Material bestehen, so dass, wenn der andere Contact des Galvanometers mit dem Mittelpunkt der Scheibe in Verbindung gebracht wird, der Stromkreis des Galvanometers geschlossen ist. Man versetze nun den Magnet sammt der Scheibe in Rotation; der Draht wird sich um die Peripherie der Scheibe wickeln, ohne auf derselben zu gleiten; diesmal aber wird man einen Strom erhalten, der unter Berücksichtigung der Geschwindigkeit der Scheibe das Resultat ergiebt, dass die Summe der auf diese Weise in dem Drahte inducirten elektromotorischen Kräfte gleich [10] der elektromotorischen Kraft ist, welche durch momentane Erregung des Magnetes in demselben inducirt werden könnte. Wir sagten: die in dem Drahte inducirten Kräfte, weil die leitende Scheibe gegenüber dem Magnet keine relative Geschwindigkeit besitzt; weder *Lenz*, noch *Neumann* noch *Weber* würden sonach annehmen, dass in der Scheibe ein Strom inducirt würde.

Findet sonach die Erregung des Stromes in dem Versuche (*g*) immer innerhalb des Drahtes statt, tritt dieser Strom vollständig zu Tage, wenn das Ende des Drahtes nicht gleitet, sondern sozusagen auf der in dem Leiter beschriebenen Curve befestigt ist und von jenem sammt dieser letzteren fortbewegt wird, und ist endlich in dem Versuche (*g*) keine Spur eines

Stromes zu erhalten, so bedeutet dies, dass gleichzeitig mit jenem Strome, falls das Ende des Drahtes auf der bezeichneten Curve gleitet, ein anderer Strom entsteht, der dem ersteren gleich und entgegengesetzt gerichtet ist.

61. Diese Versuche führen uns zu dem folgenden Satze. Die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche erregt werden, wenn in Gegenwart eines Magnetes zwei Leiter längs einer beliebigen Curve auf einander gleiten, ist gleich gross und von entgegengesetztem Vorzeichen wie die Summe der Kräfte, welche in einem längs dieser Curve gelegten Drahte durch momentane Erregung des inducirenden Magnetes, oder allgemeiner durch momentane Schliessung des den inducirenden Körper repräsentirenden Volta-Stromkreises inducirt werden könnten. Selbstverständlich ist, falls ausser dem Gleiten noch eine Aenderung der relativen Lage des inducirten und inducirenden Körpers stattfindet, der durch diese zweite Ursache inducirte Strom nach den bereits bekannten Gesetzen ebenfalls in Rechnung zu ziehen.

Dieser Satz lässt uns beinahe stillschweigend vermuthen, oder er besagt wenigstens nichts gegen die Annahme, dass die Berührungs- und Gleitstelle der Leiter der Sitz einer besonderen elektromotorischen Kraft sei; derselbe lässt sich somit in die Aussagen übersetzen, welche in der im letzten Heft des dritten Bandes dieser Toscan. Annalen im Februar 1855 publicirten zweiten Abhandlung mitgetheilt sind.

Aus dem bisher Gesagten könnte man schliessen, dass die elektromotorische Kraft, welche sich in der Zeit dt **an der Berührungsstelle** zweier in Gegenwart eines Magnetes auf einander gleitenden Leiter entwickelt, normal zu dem von der Berührungsstelle beschriebenen Flächenelement do gerichtet und gleich derjenigen elektromotorischen Kraft ist, welche durch eine momentane Magnetisirung längs der Bewegungsrichtung in do inducirt werden könnte.

Wenn wir sagen, diese Kraft sei normal zu do gerichtet, so haben wir damit nur ausgedrückt, dass von den beiden einander berührenden Flächenelementen das eine die Rolle des Platins, das andere diejenige des Zinks spielt.

Studirt man dann nach obigem Theorem die Richtung, welche man mathematisch dieser Kraft beizulegen hat, so

findet man, dass dieselbe von der Berührungsstelle nach dem Innern eines beliebigen der beiden Leiter oder umgekehrt gerichtet ist, je nachdem der betrachtete Leiter [11] sich im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne bewegt wie der Strom, der in do durch die vorbezeichnete momentane Magnetisirung inducirt werden könnte.

Mag übrigens diese Kraft ihren Sitz an der Berührungsstelle haben oder nicht, so liefern doch diese Sätze die algebraische Darstellung der Erscheinung immer mit der gleichen Genauigkeit; denn wenn man dieselben in die Sprache der Rechnung übersetzt, so übersetzt man eben nur das zu Anfang dieses Paragraphen mitgetheilte Theorem. Gehen wir zu den Formeln über.

62. Denken wir uns einen Leitungsdraht von beliebiger Gestalt, der indessen keinen geschlossenen Stromkreis bildet, das heisst dessen Enden einander nicht berühren. Dieser Leitungsdraht gleite auf einer beliebigen leitenden Fläche; wir wollen die allgemeine Formel suchen, welche die Summe aller der Kräfte ausdrückt, die durch die Lagenänderung sowie durch jene unbekannte Ursache inducirt werden, in Folge deren sich, welcher Art sie auch immer sein möge, unabhängig von der Lagenänderung beim Gleiten des Drahtes auf der leitenden Fläche nach dem in dem bekannten Theorem ausgedrückten Gesetze eine elektromotorische Kraft entwickelt.

Es sei s die Curve, welche der Draht bei Beginn der Bewegung bildete, als er eine Lage A einnahm.

Es sei s_1 die Curve, welche der Draht beim Uebergang aus der Lage A in die zweite A_1 annimmt. Nach dem in der ersten Abhandlung Gesagten haben wir uns um die verschiedenen Gestalten und Lagen des Drahtes während seines Ueberganges aus A in A_1 nicht zu kümmern.

Die Summe der in Folge dieser Lagenänderung des Drahtes inducirten elektromotorischen Kräfte beträgt

$$(34)_1 \qquad E_1 = -k\int_0^\sigma\int_0^\lambda \frac{1}{r_s}\frac{dr_s}{d\varepsilon}\frac{dr_s}{d\sigma}\,ds\,d\sigma + k\int_0^\sigma\int_0^\lambda \frac{1}{r_{s_1}}\frac{dr_{s_1}}{ds}\frac{dr_{s_1}}{d\sigma}\,ds_1\,d\sigma.$$

Darin bezeichnet σ die Länge des Volta-Stromkreises, welcher den inducirenden Körper bildet oder analytisch repräsentirt, λ die Länge des inducirten Drahtes und r_s bezw. r_{s_1} die ver-

änderliche Entfernung zwischen den Elementen $d\sigma$ und ds, bezw. ds_1 und $d\sigma$.

Bezeichnen ε und ε_1 die von den Enden des inducirten Drahtes auf der leitenden Ebene beschriebenen Curven, so haben wir auf Grund des oben ausgesprochenen Satzes den beiden vorstehenden Integralen die folgenden

$$(34)_2 \qquad E_2 = +k\int_0^\sigma\int_0^{\varepsilon^0} \frac{1}{r_\varepsilon}\frac{dr_\varepsilon}{d\varepsilon}\frac{dr_\varepsilon}{d\sigma}\,d\varepsilon\,d\sigma - k\int_0^\sigma\int_0^{\varepsilon_1^0} \frac{1}{r_{\varepsilon_1}}\frac{dr_{\varepsilon_1}}{d\varepsilon_1}\frac{dr_{\varepsilon_1}}{d\sigma}\,d\varepsilon_1\,d\sigma$$

hinzuzufügen, in welchen ε^0 und ε_1^0 die Längen der von den Enden des Drahtes beschriebenen Curven bedeuten.

[12] Für die gesuchte elektromotorische Kraft haben wir demnach den allgemeinen Ausdruck

$$(34) \qquad E = E_1 + E_2 .$$

Aus der Formel (3′) würden sich andere Glieder ergeben, die der vorstehenden Formel hinzuzufügen sein würden, falls der inducirende Volta-Stromkreis offen und für die analytische Betrachtung nicht durch einen geschlossenen Stromkreis zu ersetzen wäre. Hier jedoch handelt es sich nicht um einen solchen Fall, der sich nur bei der Induction eines Theiles des Volta-Stromkreises darbietet, wenn dieser Theil in Bewegung ist und auf dem anderen Theile schleift; die Induction findet dann zwischen den beiden Theilen statt, es wirkt der eine auf den anderen ein. Dieser Fall wird im Folgenden noch eine grosse Wichtigkeit gewinnen, weil sich aus demselben das Verhältniss der beiden Constanten A und B der Gleichung (1) ableiten lässt. Fürs erste jedoch wollen wir uns auf die bekannten Versuche beschränken.

Gehen wir zur Discussion der Versuche (a), (b), (c), (d) und (e) über:

63. Wollten wir direct von den Formeln $(34)_1$ und $(34)_2$ ausgehen, so hätten wir eine zu weitläufige Rechnung vorzunehmen, die wir vermeiden können, da wir bereits wissen, dass für den Fall der Wirkung eines Solenoids auf einen geschlossenen Stromkreis die besagten Formeln sich in eine einfachere und unserem Zwecke besser entsprechende Gestalt bringen lassen.

Es sei $d\omega$ ein Querschnitt des Solenoids normal zur Richtung seiner Leitcurve s, $d\omega'$ ein Element einer beliebigen

durch den erwähnten geschlossenen Stromkreis begrenzten Curve; ferner sei s' die Normale zum Elemente $d\omega'$ und r die Entfernung zwischen $d\omega'$ und $d\omega$. Dann ist die elektromotorische Kraft, welche bei momentaner Erregung des durch das Solenoid repräsentirten Magnets längs der Grenzcurve der Fläche, deren Element $d\omega'$ ist, das heisst in dem geschlossenen Stromkreise, inducirt wird, durch die Formel

$$E = C\iint \frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds'}\,ds\,d\omega'$$

ausgedrückt, welche sich aus der Gleichung (10) des § 17 ergiebt und in welcher die Integrationen über die ganze vorbezeichnete Fläche und längs des ganzen Solenoids zu erstrecken sind.

C ist eine dem Querschnitt des Solenoids und der Intensität des Magnetismus proportionale Constante.

Ferner ist

$$E = -C\iint \frac{d\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds'}}{ds}\,ds\,d\omega'.$$

[13] In den Fällen der Versuche (*a*) etc. beschreiben die Gleitcontacte concentrische und zur Polaraxe, das heisst zu der durch die Pole gehenden Geraden, normale Kreise; somit ist s' parallel zur Axe und dr/ds' der Cosinus des Winkels α zwischen r und der Axe. Integrirt man demnach nach s und bezeichnet mit α_1 und α_2 die Winkel, welchen die von der Mitte von $d\omega'$ nach den Polen des Solenoids führenden Geraden r_1 und r_2 mit der Axe einschliessen, so folgt

$$E = -C\int\left(\frac{1}{r_1^2}\cos\alpha_1 - \frac{1}{r_2^2}\cos\alpha_2\right)d\omega'.$$

Es sei nun s_1 die Entfernung des von dem Gleitcontact beschriebenen Kreises vom Nordpol, s_2 seine Entfernung vom Südpol; diese Entfernungen sollen vom Nordpol nach dem Südpol zu als positiv gerechnet werden und es sind dann, wenn der Gleitcontact sich nahe dem Nordpol befindet und sich ausserhalb der Polaraxe projicirt, s_1 und s_2 positiv; wenn dagegen die Projection zwischen den Nord- und Südpol fällt,

so ist s_1 negativ und s_2 positiv u. s. f. Welches aber das Vorzeichen von s_1 und s_2 sein mag, so ist

$$\cos\alpha_1 = \frac{s_1}{r_1}; \quad \cos\alpha_2 = \frac{s_2}{r_2}.$$

Bezeichnet nun ϱ die Entfernung zwischen $d\omega'$ und der Polaraxe, so ist

$$r_1 = \sqrt{s_1^2 + \varrho^2}; \quad r_2 = \sqrt{s_2^2 + \varrho^2}; \quad d\omega' = \varrho\, d\varrho\, d\varphi,$$

worin φ den Winkel von ϱ mit einer in der Ebene des Kreises festen Geraden bedeutet. Es folgt sonach

$$E = -C\iint\left(\frac{s_1\varrho}{(s_1^2+\varrho^2)^{3/2}} - \frac{s_2\varrho}{(s_2^2+\varrho^2)^{3/2}}\right) d\varrho\, d\varphi,$$

oder durch Integration von $\varrho = 0$ bis zu $\varrho =$ dem Radius des Kreises

$$E = C\int\left(\frac{s_1}{(s_1^2+\varrho^2)^{1/2}} - \frac{s_2}{(s_2^2+\varrho^2)^{1/2}}\right) d\varphi,$$

und weiter durch Integration von $\varphi = 0$ bis zu $\varphi = 2\pi$

$$E = 2\pi C\left(\frac{s_1}{(s_1^2+\varrho^2)^{1/2}} - \frac{s_2}{(s_2^2+\varrho^2)^{1/2}}\right).$$

[14] Wir haben nun auch den anderen Gleitcontact zu betrachten. Die Bewegung desselben mit Bezug auf den Magnet ist die gleiche wie diejenige des ersten; die elektromotorischen Kräfte für die von ihnen beschriebenen Kreise sind somit im Galvanometer einander entgegengesetzt und wir erhalten also, wenn wir den Buchstaben der vorstehenden Formel einen Accent hinzufügen, für die im Galvanometer wirksame elektromotorische Kraft den Ausdruck

$$E = 2\pi C\left[\left(\frac{s_1}{(s_1^2+\varrho^2)^{1/2}} - \frac{s_2}{(s_2^2+\varrho^2)^{1/2}}\right) - \left(\frac{s_1'}{(s_1'^2+\varrho'^2)^{1/2}} - \frac{s_2'}{(s_2'^2+\varrho'^2)^{1/2}}\right)\right], \tag{35}$$

welcher die Gesetze der Versuche (*a*) etc. enthält.

64. Im Versuche (*a*) ist $\varrho = \varrho'$.

Berühren die beiden Gleitcontacte denselben Querschnitt des Magnets, so ist $E = 0$, das heisst es giebt im Galvanometer keinen Strom.

Gleitet einer der beiden Contacte auf der Nordpol-, der andere auf der Südpol-Fläche des Magnets, so ist $s_1 = 0$, $s_2 = l$, das heisst gleich der Länge des Magnets, $s_1' = -l$ und $s_2' = 0$; es ist also $E = 0$ und auch in diesem Falle ist somit kein Strom vorhanden.

Gleitet einer der Contacte auf dem Nordpol und der andere auf der Mitte des Magnets, so ist $s_1 = 0$, $s_2 = l$, $s_1' = -\frac{l}{2}$ und $s_2' = \frac{l}{2}$; wird dagegen der erstere Contact vom Nordpol nach der Mitte des Magnets, der andere nach dem Südpol verlegt, so wird $s_1 = -\frac{l}{2}$, $s_2 = \frac{l}{2}$, $s_1' = -l$ und $s_2' = 0$; diesen beiden Fällen entsprechen also gleiche und entgegengesetzte Ströme.

Ist der Magnet hinreichend lang und befinden sich die beiden Contacte nahe zu dem einen Pol, so kann man von dem anderen Pol — es sei etwa der Südpol — absehen und man hat

$$E = 2\pi C \left(\frac{s_1}{(s_1^2 + \varrho^2)^{1/2}} - \frac{s_1'}{(s_1'^2 + \varrho^2)^{1/2}} \right).$$

Befinden sich die Berührungsstellen der beiden Contacte in der Nähe des besagten Poles zwischen dem Nord- und Südpol, so ist s_1 und ebenso s_1' negativ. Verschiebt man die Gleitcontacte parallel mit sich selbst nach ausserhalb des Magnets, so dass sie sich auf zwei in der Nähe des Nordpols, aber ausserhalb des Polarabstandes gelegene Punkte projiciren, so werden s_1 und s'_1 beide positiv, aber in einem Falle wird $s_1 < s_1'$, im andern Falle $s_1 > s_1'$; das Vorzeichen von E ändert sich also nicht und dieses bedeutet, dass die inducirten Ströme ihre Richtung unverändert beibehalten. Verschiebt man dagegen die Gleitcontacte in der Weise, dass in beiden Fällen der nämliche Contact immer dem Pole näher ist, so ändern die Ströme ihr Vorzeichen.

[15) Die Art, wie wir zu der Gleichung (35) gelangen, zeigt uns ferner, dass die Ströme unabhängig sind von der Gestalt des Stromkreises und des Magnets, welche wir als cylindrisch angenommen hatten, um nur Ströme zu haben, die sich nach der Formel (34) berechnen liessen. Nunmehr aber können wir in all den Fällen, in welchen die Gleitcontacte

geschlossene Curven beschreiben, den Magnet von beliebiger Gestalt annehmen und, wenn nur der Einfachheit der Rechnung halber der Querschnitt desselben als klein vorausgesetzt wird, die Gleichung (35) zur Anwendung bringen.

65. Sind ferner die Gleitcontacte unbeweglich und rotirt die unter ihnen befindliche leitende Scheibe oder Ebene um eine Axe, so ist der nach der vorliegenden Theorie berechnete Strom im Allgemeinen von der Gestalt des Magnets abhängig. Dieser letztere Umstand unterscheidet unsere Arbeit wesentlich von denjenigen der Herren *Neumann* und *Weber*, während in dem besonderen Falle des vorstehenden Paragraphen unsere Formeln und diejenigen dieser ausgezeichneten mathematischen Physiker vollkommen mit einander übereinstimmen würden. Das weiter oben Gesagte erweist jedoch das *Lenz*'sche Gesetz als ein Hülfsmittel, welches sich auf die durch Gleichung (35) analysirbaren Versuche anwenden lässt. Wir haben indessen in die Discussion der Erscheinungen so viel Klarheit gebracht, dass es nunmehr leicht ist, bei der Behandlung der verschiedenen Fälle die Hypothesen von *Weber* und *Neumann* zu erörtern.

66. In dem Versuche (*b*) ist $s_1 = s_1'$ und $s_2 = s_2'$ und somit

$$E = 2\pi C\left[\left(\frac{s_1}{(s_1^2+\varrho^2)^{1/2}} - \frac{s_2}{(s_2^2+\varrho^2)^{1/2}}\right) - \left(\frac{s_1}{(s_1'^2+\varrho'^2)^{1/2}} - \frac{s_2}{(s_2'^2+\varrho'^2)^{1/2}}\right)\right].$$

Der Einfachheit halber behandeln wir den Fall, dass die Gleitcontacte auf der Scheibe zwei Kreise beschrieben, deren Radien nur sehr wenig von einander verschieden seien. Dann lässt sich $\varrho' = \varrho + d\varrho$ setzen und man hat

$$dE = 2\pi C\left(\frac{s_1}{(s_1^2+\varrho^2)^{3/2}} - \frac{s_2}{(s_2^2+\varrho^2)^{3/2}}\right)\varrho\, d\varrho\,.$$

Mit wachsendem ϱ wird dieser Ausdruck gleich Null und nimmt bei weiterer Zunahme von ϱ das entgegengesetzte Vorzeichen wie vorher an; die im Versuche (*b*) beschriebenen Resultate sind damit bestätigt.

Um den Werth von ϱ zu finden, für welchen $E = 0$ wird, setzen wir

$$\frac{s_1}{(s_1^2+\varrho^2)^{3/2}} = \frac{s_2}{(s_2^2+\varrho^2)^{3/2}},$$

oder

$$s_1^2(s_2^2 + \varrho^2)^3 = s_2^2(s_1^2 + \varrho^2)^3 .$$

[16] Aus dieser Gleichung, die mit Bezug auf ϱ^2 vom dritten Grade ist, ergiebt sich nach bekannten Formeln

$$\varrho^2 = s_1^{\frac{2}{3}} s_2^{\frac{4}{3}} + s_1^{\frac{4}{3}} s_2^{\frac{2}{3}} .$$

Für $s_1 = 1$ und $s_2 = 27$ hätte man $\varrho^2 = 81 + 9 = 90$, also angenähert

$$\varrho = \sqrt{90} = 9{,}5 .$$

Für $s_1 = 1$ und $s_2 = 8$ wird $\varrho^2 = 16 + 4 = 20$, also ungefähr

$$\varrho = \sqrt{20} = 4{,}5 .$$

Bei jeder Anwendung dieser Formeln auf die verschiedenen Specialfälle muss man sich jedoch erinnern, dass diese Formeln in erster Linie sich nur auf Magnete von sehr kleinem Querschnitt beziehen und dass sie in zweiter Linie die Lage der Magnetpole als bekannt voraussetzen.

Der Fall eines Magnetes von beliebigem Querschnitt lässt sich gleichfalls nach Formel (35) behandeln, bringt aber andere Integrationen mit sich, zu deren Ausführung die Kenntniss der Vertheilung des Magnetismus innerhalb des Magnetes erforderlich ist. Wir heben das hervor, weil manche Experimentatoren häufig die Pole und die Enden des Magnetes nicht von einander unterscheiden; bei der Beschreibung vieler Versuche können dadurch keine Irrthümer entstehen, wohl aber bei vielen anderen und so auch bei den hier behandelten Fällen. Herr *Verdet* giebt diesbezüglich in seiner Abhandlung über die Wirkung des Magnetismus in den transparenten Körpern ein klares Beispiel.

67. Die Formel (35) zeigt eine vollkommene Aehnlichkeit mit der Formel, welche in der *Ampère*'schen Theorie das Rotationsmoment eines offenen Stromkreises um die Polaraxe eines Magnetes darstellt. Eine derartige Aehnlichkeit mit den Formeln von *Weber* und *Neumann* besteht bemerkenswerther Weise in einer gewissen Reihe von Fällen, in welchen es sich um lineare Stromkreise handelt; aber der analytische Ausdruck der elektromotorischen Kraft, die in einem Elemente inducirt wird, welches nicht auf dem Leiter, dem es an-

gehört, gleitet, sondern nur seine Lage mit Bezug auf den inducirenden Körper ändert, bietet keine derartige Aehnlichkeit dar; und die vorliegende Arbeit, welche, wie wir in der zweiten Abhandlung sahen, den allgemeinen Fall der Induction in einem Körper von beliebiger Gestalt behandelt, bleibt darum wesentlich verschieden von den Arbeiten jener ausgezeichneten Mathematiker.

68. In dem Versuche (*b*), wo eine Scheibe concentrisch und normal zur Axe des cylindrischen Magnets rotirt, sind keine durch relative Lagenänderungen inducirte Ströme vorhanden; die Entstehung und das Hervortreten der Ströme erfolgt in diesem Falle durch die Anbringung [17] der Gleitelektroden auf der Scheibe selbst. Dies steht in Uebereinstimmung mit dem Versuche und mit unseren Formeln.

Nach den Hypothesen der Herren *Weber* und *Neumann* wären in diesem Falle (*b*) die in der Scheibe inducirten elektromotorischen Kräfte nicht gleich Null, vielmehr müssten längs den Radien der Scheibe Linien maximaler Induction bestehen und die elektromotorischen Kräfte gleichförmig um den gemeinsamen Mittelpunkt vertheilt sein. Aber gerade in Folge dieses letzteren Umstandes könnten, wenn die Scheibe homogen ist, keine Ströme vorhanden sein, weil die Kräfte selbst gegenseitig ihre Wirkungen aufheben würden. In der That würde kein Grund vorhanden sein, weshalb die Ströme eine andere Richtung als diejenige der Radien der Scheibe haben sollten; dieselben würden also in normaler Richtung auf den Umfang des Leiters treffen und könnten in Folge dessen nicht circuliren, wenn man nicht die Drahtenden des Galvanometers auf der Scheibe anbringen wollte. Giebt man dagegen die kreisförmige Gestalt des rotirenden Körpers auf oder ist derselbe ein derartiger Leiter, dass in ihm Ströme nach seinen drei Dimensionen möglich sind, so hätten jene Physiker immer noch zu beweisen, dass ihre Formeln auch in diesem Falle mit der Erfahrung übereinstimmen; das heisst, es bliebe zu beweisen, dass die Wirkungen der elektromotorischen Kräfte, wie im ersten Falle, einander aufheben würden.

Der allgemeine Fall der Induction setzt sich aus zwei Fällen zusammen, welche gesondert oder gleichzeitig auftreten können; diese Fälle sind einzeln durch die Formeln $(34)_1$ und $(34)_2$, zusammen durch die Formel (34) dargestellt[1]).

[1]) Die Formeln, welche die Werthe von E_1 und E_2 geben, sind bezw. mit $(34)_1$ und $(34)_2$ bezeichnet.

69. Häufig kann es, auch wenn die Contactdrähte des Galvanometers auf dem bewegten Körper angebracht sind, der in Berührung mit denselben gleitet, geschehen, dass die nach Formel $(34)_2$ berechneten Kräfte als Summe Null ergeben; wenn dann das Galvanometer einen Strom anzeigt, so kann derselbe nur von der Verschiedenheit des elektrischen Zustandes an den Gleitcontacten herrühren. In diesen Fällen dient die verschiedene Intensität der mit dem Galvanometer gemessenen Ströme dazu, um experimentell zu bestimmen, wie die elektrischen Zustände in dem inducirten Körper variiren. So kann man, wie es zuerst durch *Matteucci* geschehen ist, die Linien gleichen elektrischen Zustandes verzeichnen — Linien, welche dadurch charakterisirt sind, dass bei Anbringung der Contacte an zwei zu derselben Linie gehörigen Punkten im Galvanometer kein Strom auftritt — und man kann dann zur Bestimmung des, dem vorigen orthogonalen, Systems der Linien maximaler Strömung übergehen. Diese Methode entspricht der Erfahrung und ist von der *Ohm*'schen Theorie vorgezeichnet; sie wurde zum ersten Male von Herrn *Kirchhoff* auf den Fall eines mit den Polen einer Batterie in Verbindung stehenden Leiters angewendet.

70. Als ein Beispiel für die Art, wie in der Rechnung die auf Gleichung $(34)_2$ bezüglichen elektromotorischen Kräfte zu berücksichtigen sind, wählen wir den Fall eines geradlinigen und sehr dünnen Magnetes, der normal zur rotirenden Scheibe, mit einem Pole sehr nahe zu derselben und mit dem anderen Pole in grosser Entfernung von derselben angeordnet ist.

[18] Werden die Gleitcontacte des Galvanometers unbeweglich gehalten, so beschreiben dieselben im Allgemeinen auf der in Drehung begriffenen Scheibe zwei concentrische Kreise; wir wollen aber den Fall behandeln, dass einer der Contacte sich im Rotationsmittelpunkt, welches zugleich der Mittelpunkt Centrum der Scheibe ist, befindet. Wir benützen die Gleichung (25) des § 40.

Sind $x'y'$ die Coordinaten eines dieser beiden Kreise und ist ds' ein Element desselben, welches mit den Axen x und y Winkel einschliesst, deren *Cosinus* bezw. a' und b' seien, sind ferner xy die Coordinaten des Magnets oder seines Poles und ist ω der Querschnitt des Magnets, so ist die durch momentane Erregung des Magnets in ds' inducirte elektromotorische Kraft

$$A\omega ds' \frac{a'(y-y') - b'(x-x')}{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Hierin haben wir

$$a' = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \quad b' = -\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}};$$

und wenn wir der Einfachheit halber $x = \varrho$, $y = 0$ und $\varrho_1 = \sqrt{x'^2+y'^2}$ setzen und wenn der Winkel zwischen ϱ_1 und der x-Axe mit φ bezeichnet wird, so geht die vorstehende Formel über in

$$A\omega ds' \frac{\varrho\cos\varphi - \varrho_1}{\varrho^2 - 2\varrho\varrho_1\cos\varphi + \varrho_1^2}.$$

Beschreibt nun die Scheibe in der Zeiteinheit einen Winkel v, so ist $v\varrho_1 dt$ der von dem Gleitcontact in der Zeit dt auf der Scheibe beschriebene Bogen und wir setzen deshalb $ds' = v\varrho_1 dt$. Nach § 61 ist dann die Summe der durch das Gleiten der besagten Elektrode auf der Scheibe in der Zeit dt inducirten elektromotorischen Kräfte

$$dF = -A\omega v\varrho_1 \frac{\varrho\cos\varphi - \varrho_1}{\varrho^2 - 2\varrho\varrho_1\cos\varphi + \varrho_1^2}.$$

Der im Galvanometer nach Verlauf einer Zeit t fliessende Strom ist proportional dem Verhältniss zwischen dF und dt anzunehmen; er ist also, wenn l den Widerstand des Stromkreises bezeichnet, durch

$$\frac{1}{l}\frac{dF}{dt}$$

ausgedrückt. Diese Formel sagt aus, dass man keinen Strom erhält, wenn man die Contacte auf dem Kreise anbringt, welcher durch den Rotationsmittelpunkt und die Projection des Magnetpols auf die Scheibe geht. An Stelle eines Magnetes können wir, in ähnlicher Lage wie diesen, auch deren zwei haben, deren ungleichnamige Pole sich vor der Scheibe, in gleichem Abstand vom Mittelpunkt, befinden und sich auf eine durch den Mittelpunkt gehende Linie, die Polarlinie, projiciren. Bringt man dann die Contacte auf einem zur Scheibe concentrischen und durch die Projectionen der Magnetpole

gehenden Kreise oder auf der Normalen zu der durch den Mittelpunkt gehenden Polarlinie an, so beschreiben zwar in dem einen wie dem anderen Falle die unbeweglichen Contacte im Allgemeinen verschiedene Kreise auf der Scheibe, eine zur Ermittelung des im Galvanometer circulirenden Stromes ähnlich wie im vorigen Falle angestellte Rechnung würde aber doch als Ergebniss die Differenz zwischen zwei gleichen Beträgen [19] von entgegengesetztem Vorzeichen liefern, von welchen je einer von den Wirkungen der Magnete auf einen der Kreise allein herrührt, und so würde diese Differenz gleich Null sein. Man bemerke, dass die Magnete sich immer in gleichem Abstand vom Mittelpunkt befinden.

Eine derartige einfache Berechnung sagt also, dass in diesem Falle die im Galvanometer circulirenden Ströme lediglich von der Differenz zwischen den elektrischen Zuständen der Scheibe herrühren.

71. Bei all den beschriebenen Versuchen haben wir die Geschwindigkeit des inducirenden Körpers als constant betrachtet; wäre dies nicht der Fall, so müsste dieselbe als Function der Zeit zu behandeln sein. Dieses würde nicht hinreichen, um die Form der analytischen Function, welche, wie wir in der zweiten Abhandlung sahen, die Vertheilung des elektrischen Zustandes auf der Scheibe darstellt, zu verändern; nur die Constante, mit welcher die betreffende Function multiplicirt ist, kann mit der Zeit veränderlich sein.

Erst wenn die Geschwindigkeit des inducirten Körpers ausserordentlich gross ist, wird die Form dieser Function, in Folge des Einflusses der Zeit, welche die elektromotorischen Kräfte zum Verschwinden brauchen, eine Veränderung erfahren. Ueberschreitet in den vorhin erörterten Fällen die Geschwindigkeit der Scheibe zehn oder zwölf Umdrehungen pro Secunde, so beginnt dieser Einfluss bemerkbar zu werden, weil die elektromotorische Kraft eine zwar kurze, aber merkliche Zeit anhält und die in einem beliebigen Punkte der Scheibe erzeugte Kraft sonach noch fortbesteht, während in Folge der Bewegung der Scheibe an derselben Stelle bereits andere elektromotorische Kräfte erzeugt werden. Ist die Geschwindigkeit der Scheibe gross, so wird der elektrische Zustand jenes Punktes mit den Coordinaten x und y derjenige sein, welcher ihm vermöge der in dem betreffenden Augenblicke inducirten elektromotorischen Kräfte zukommt, vermehrt um die Summe der noch in ihm andauernden elektrischen Zu-

stände, welche von den in den vorhergegangenen Augenblicken inducirten elektromotorischen Kräften herrühren und, da sie noch keine Zeit zum Verschwinden gehabt hatten, sich sozusagen in der Scheibe übereinanderlagern.

Es sei T die Dauer einer vollständigen Umdrehung der Scheibe und es seien in einem beliebigen Augenblicke, von welchem ab die Zeiten gerechnet werden sollen,

$$x = \varrho \cos \varphi , \quad y = \varrho \sin \varphi$$

die Coordinaten eines Punktes M der Scheibe. Zu einer Zeit t_1 vor dem erwähnten Augenblicke hatte dieselbe Stelle der Scheibe in der als fest angenommenen xy-Ebene die Coordinaten $x_1 y_1$, die durch die Formeln

$$x_1 = \varrho \cos \left(\varphi - \frac{2\pi t_1}{T} \right),$$

$$y_1 = \varrho \sin \left(\varphi - \frac{2\pi t_1}{T} \right)$$

gegeben sind.

[20] Der zu diesem Punkt M gehörige elektrische Zustand wird im Allgemeinen durch eine Function von x_1 und y_1 dargestellt sein, welche wir mit E'_{t_1} bezeichnen wollen. Es sei $\psi(t)$ die Function der Zeit, nach welcher die inducirte elektromotorische Kraft vom Augenblick ihrer Entstehung an abnimmt und erlischt; dann wird, wenn der Punkt M der Scheibe die durch die Coordinaten x und y bezeichnete Stelle erreicht hat, der elektrische Zustand, welcher in Folge der zu einer dem betrachteten Augenblick vorausgegangenen Zeit t auf die Scheibe ausgeübten Induction noch in der Scheibe vorhanden ist, durch den Ausdruck

$$E'_t \psi(t)$$

gegeben sein; und um die Summe E der elektrischen Zustände zu finden, welche im Punkte M der Scheibe in dem Augenblicke, in welchem derselbe den durch die Coordinaten x und y bezeichneten Punkt der xy-Ebene erreicht, also in dem der Zeit $t = 0$ entsprechenden Augenblicke, zusammen vorhanden sind, setzen wir

$$E = \int_{t=0}^{t=t_1} E'_t \psi(t) dt .$$

Die partielle Integration ergiebt für das unbestimmte Integral

$$\int E_t' \psi(t) dt = E_t' \int \psi(t) dt - \frac{dE'}{dt} \int \left(\int \psi(t) dt \right) dt + \cdots .$$

Die Function ψ besitzt die Eigenschaft, für einen merklichen Werth von t gleich Null zu werden; t_1 kann die Zeit sein, welche seit dem Beginn der Bewegung oder seit $E'_{t_1} = 0$ für $t = t_1$ verflossen ist. Werden mit $\alpha\beta\gamma\cdots$ die mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Werthe bezeichnet, welche die als Factoren der Glieder der vorstehenden Reihe auftretenden Integrale für $t = 0$ und $t = t_1$ annehmen, so erhält man die Reihe

$$E = \alpha E'_{t=0} - \beta \frac{dE_t'}{dt_{t=0}} + \gamma \frac{dE_t'}{dt_{t=t_1}} - \cdots .$$

72. Wenden wir die vorstehende Formel auf den Fall des § 47 an, von welchem in § 70 die Rede gewesen war. In diesem Falle ist, wenn der Einfachheit halber von den Constanten abgesehen wird, mit welchen E'_{t_1} in jedem Falle multiplicirt werden muss,

$$E'_{t_1} = \frac{x_1 - l}{(x_1 - l)^2 + y_1^2} - \frac{x_1 + l}{(x_1 + l)^2 + y_1^2} .$$

21] Ebenso ist

$$E'_{t=0} = \frac{x - l}{(x - l)^2 + y^2} + \frac{x + l}{(x + l)^2 + y^2} ;$$

$$\frac{dE_t'}{dt_{t=t_1}} = \frac{2\pi}{T} y_1 (x_1^2 + y_1^2 - l^2) \left(\frac{1}{r_1'^4} + \frac{1}{r_2'^4} \right) ;$$

$$\frac{dE_t'}{dt_{t=0}} = \frac{2\pi}{T} y (x^2 + y^2 - l^2) \left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} \right) ;$$

und endlich

$$E = \alpha \left(\frac{x - l}{r_1^2} + \frac{x + l}{r_2^2} \right) - \frac{2\pi}{T} \beta y (x^2 + y^2 - l^2) \left(\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} \right)$$
$$+ \frac{2\pi}{T} \gamma y_1 (x_1^2 + y_1^2 - l^2) \left(\frac{1}{r_1'^4} + \frac{1}{r_2'^4} \right) + \cdots .$$

Ist T hinreichend gross, so können die folgenden, durch seine Potenzen dividirten Glieder der Reihe vernachlässigt werden; auch der Versuch lehrt, dass bei geringer Geschwindigkeit der Scheibe die vorstehende Reihe sich auf das erste Glied reducirt. Ferner beachte man, dass die von der zweiten Integrationsgrenze t_1 herrührenden Glieder in Folge der überaus kleinen Beträge von γ etc. von zu vernachlässigender Grösse sein müssen, wofern nur t_1 einen merklichen Betrag hat, da es in diesem Falle widersinnig wäre, wenn der Betrag von E von dieser Grenze abhängen sollte. Es reducirt sich also angenähert E auf

$$E = \frac{2ax(x^2+y^2-l^2)}{r_1^2 r_2^2} - \frac{2\pi}{T}\beta y(x^2+y^2-l^2)\left(\frac{1}{r_1^4}+\frac{1}{r_2^4}\right).$$

Der Kreis, dessen Radius gleich dem Abstande der Pole vom Mittelpunkte des Magnets ist, wird sonach immer eine Linie elektrischen Nullzustandes sein; und das Gleiche gilt von der durch die Gleichung

$$\alpha x = \frac{\pi\beta}{T} y \left(\frac{r_1^2}{r_2^2}+\frac{r_2^2}{r_1^2}\right)$$

dargestellten Linie. Diese letztere Linie schneidet die Axen im Coordinatenanfang und erstreckt sich sowohl nach der Seite der positiven Werthe von x und y, wie auch nach derjenigen Seite, wo x und y beide negativ sind; in einer gewissen, im Verhältniss zur Entfernung der Magnetpole vom Ursprung beträchtlichen Entfernung von diesem letzteren fällt sie merklich mit einer Geraden zusammen, welche mit der Polaraxe einen Winkel einschliesst, dessen Tangente gleich $\alpha T/\pi\beta$ ist. [22] Das Verhältniss zwischen den beiden Grössen α und β liesse sich somit experimentell bestimmen. Falls die Scheibe sich mit geringerer Geschwindigkeit bewegt, ist diese Linie merklich gerade und normal zur Polaraxe, wie wir bereits sahen und wie es der Versuch bestätigt. In dem hier behandelten Falle verliert diese Linie wenigstens zum Theil ihre geradlinige Gestalt und verschiebt sich in der Richtung der Bewegung der Scheibe von den positiven y nach den positiven x.

73. Der Zweck, welchen wir uns gesetzt hatten, ist nunmehr erreicht; wir haben auf experimenteller Grundlage die Formeln aufgestellt, welche für jede gegenwärtig bekannte

Inductionserscheinung die Intensität und Richtung der inducirten Ströme darstellen. Das allgemeine Ergebniss unserer Arbeit findet sich in der Gleichung (34) und in der in unserer zweiten Abhandlung vermittelst der *Ohm*'schen Theorie vorgenommenen Verallgemeinerung dieser Gleichung auf den Fall der Induction in einem beliebigen, linearen oder nicht linearen Körper.

Es ist zu berücksichtigen, dass die Formel (34) sich in die beiden Formeln $(34)_1$ und $(34)_2$ scheidet, von welchen jede für sich besondere, durch den Versuch bezeichnete Verhältnisse betrifft, welche gesondert oder gleichzeitig bestehen können; diese Verhältnisse offenbaren sich in ihren Folgen nur durch die Fernewirkungen in einem inducirenden Körper, aber man sieht nicht, welche Beziehungen zwischen denselben in der letzten Ursache der Erscheinung stattfinden können. Das heisst man sieht nicht, weshalb eine continuirliche Veränderung, welche zwischen den Berührungsflächen zweier den inducirten Stromkreis bildenden Leiter vor sich geht, dieselbe Wirkung hervorbringen kann wie eine relative Lagenänderung eines inducirten Elementes mit Bezug auf ein anderes Element eines inducirenden Körpers. Eine derartige Frage wird von uns gelöst werden, sobald wir wissen, weshalb eine Lagenänderung zwischen einem inducirten und einem inducirenden Element einen Inductionsstrom und im Allgemeinen die von *Faraday* entdeckten Ströme hervorrufen kann; denn diese Frage hängt von der letzten Ursache der Erscheinung ab, über welche die Gleichung (34) nichts auszusagen vermag; diese liefert nur die Gesetze der Erscheinung und die algebraischen Bedingungen, denen jede Hypothese zu genügen hat, welche auf Grund einer zweckmässigen Wahl zwischen den einfachen und allgemeinsten Naturgesetzen die Erscheinung erklären will.

Wenn die Natur uns ihre Erscheinungen manchmal unter sehr complicirten Gesetzen offenbart, so rührt dies wahrscheinlich davon her, dass wir nicht alle gleichartigen Erscheinungen kennen und dass uns somit die Grundlagen zur Auffindung der einfachsten und allgemeinsten Gesetze fehlen; und dieser Mangel an Kenntnissen lässt sich kaum anders ersetzen als durch das Studium der Gesetze, welche sich aus den bereits bekannten Erscheinungen ergeben; mit Hülfe dieser Gesetze und vermittelst unablässiger Versuche müssen wir es dann dahin zu bringen suchen, dass uns Weiteres offenbar werde. Diesem Studium, welches so weit auszudehnen ist, als es

unsere Kräfte gestatten, kann die Hypothese folgen; diese letztere mag von jenen bereits bekannten und einfachen Gesetzen ausgehen, jenseits deren unser Gefühl uns die Auffindung noch einfacherer oder allgemeinerer Gesetze für keine Zeit als wahrscheinlich erhoffen lässt.

[23] 74. Im ersten Bande der von den Herren *Matteucci* und *Piria* redigirten Zeitschrift »Il Nuovo Cimento« habe ich unter Benützung des in diesen drei Abhandlungen im Allgemeinen Bewiesenen in Kürze gesagt, wie die Theorie der inducirten Ströme nunmehr ohne allzuweites Eingehen auf die mathematische Analyse und ohne Annahme von Hypothesen dargestellt werden kann. Hervorragende Physiker, welche diesen Gegenstand bereits behandelt haben, konnten aus Mangel hinreichend allgemeiner Fundamentalthatsachen vielleicht keine genaue Theorie der Induction geben; um diesem Mangel abzuhelfen, mussten sie von einigen Erscheinungen ausgehen, welche unter zu speciellen Bedingungen stattfinden, als dass sich aus ihnen ohne Zuhülfenahme von Hypothesen ein allgemeines Gesetz gewinnen liesse; so wurden die unmittelbaren Folgerungen der Thatsachen mit den aus den Hypothesen abgeleiteten vereinigt und vermengt. Sie erzielten jedoch, soweit die Richtung der inducirten Ströme in Betracht kommt, eine überaus geistreiche und für einen Leser, der über diesen Gegenstand keine besonderen Studien gemacht hat, anscheinend sehr klare und einfache Darstellung der Thatsachen; man kann sich davon in dem ausgezeichneten Lehrbuch der Elektricität von Herrn *A. De la Rive* überzeugen.

Schliesslich aber reducirt sich die ganze analytische Theorie der Inductionserscheinungen auf den Beweis der Gleichung (3′), das heisst der Elementarformel für den Fall der durch das momentane Eintreten des Stromes in den inducirenden Stromkreis inducirten Ströme. Mittels zweier einfacher und allgemeiner Gleichgewichtsfälle geht man dann von dieser Formel zum Fall der durch relative Bewegung des inducirten und des inducirenden Stromkreises inducirten Ströme, sowie auf den Fall der durch relative Bewegung zweier Theile eines und desselben inducirten Stromkreises inducirten Ströme über.

In Bezug auf die algebraische Darstellung der Erscheinung könnte somit die Theorie keine grössere Einfachheit und Einheit der Begriffe darbieten; und wenn auch ihre Ursache noch zu entdecken bleibt, so sind hier doch die Gesetze vollständig und experimentell bewiesen.

Hinsichtlich der Ursache handelt es sich darum, die Formel (3′) zu erklären; der Leser misstraue jedoch jenen Erklärungsweisen der inducirten Ströme, die sich zuerst dem Geiste darbieten und sich nur auf gewisse Analogien zwischen den Richtungen dieser Ströme und einigen Erscheinungen der Elektrostatik gründen; die Schwierigkeiten, welche die Erklärung der *Ampère*'schen Formel darbietet und welche dieser Forscher selbst in seiner Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen bezeichnet hat, finden sich auch bei der Theorie der Induction wieder. Gewiss aber wird ein Tag kommen, an welchem alle Glieder der Kette gefunden sein werden, mit deren Hülfe wir, mit der Feder in der Hand, von den ersten Gesetzen der Elektrostatik aus von Gleichung zu Gleichung bis zu den allgemeinsten Gesetzen der elektrodynamischen Erscheinungen gelangen können.

Anmerkungen des Verfassers.

Zu § 11. Zur Bequemlichkeit des Lesers bemerken wir, dass die Gleichung

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

durch Ableitung nach s Folgendes ergiebt:

$$r\frac{dr}{ds} = (x - x')\frac{dx}{ds} + (y - y')\frac{dy}{ds} + (z - z')\frac{dz}{ds},$$

ebenso durch Ableitung nach s'

$$r\frac{dr}{ds'} = -(x - x')\frac{dx'}{ds'} - (y - y')\frac{dy'}{ds'} - (z - z')\frac{dz'}{ds'};$$

und da

$$\cos\theta' = \frac{x - x'}{r}\frac{dx'}{ds'} + \frac{y - y'}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z - z'}{r}\frac{dz'}{ds'},$$

$$\cos\theta = \frac{x - x'}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y - y'}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z - z'}{r}\frac{dz}{ds}$$

ist, so folgt

$$\cos\theta = \frac{dr}{ds}, \quad \cos\theta' = -\frac{dr}{ds'};$$

ferner folgt aus $r\frac{dr}{ds}$ durch Ableitung

$$r\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} = -\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'} = -\cos\varepsilon.$$

Zu § 25. Hier soll nur der Einfluss der relativen Lagen

der Stromkreise gemeint sein, nicht aber die etwaige Ursache der von *Marianini* eingehend untersuchten Anomalien.

Zu § 43. Man bemerke, dass

$$\int \frac{\varrho_1^2 - h\cos\omega'}{\varrho_1^2 - 2\varrho_1 h\cos\omega' + h^2}\,d\omega' = \varrho_1 \int \frac{d\omega'}{\varrho_1^2 - 2\varrho_1 h\cos\omega' + h^2} + \left(\frac{\omega'}{2\varrho_1} + \frac{\varrho_1^2 + h^2}{2\varrho_1}\int \frac{d\omega'}{\varrho_1^2 - 2\varrho_1 h\cos\omega' + h^2}\right),$$

sowie dass für $\varrho_1 > h$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega'}{\varrho_1^2 - 2\varrho_1 h\cos\omega' + h^2} = \frac{2\pi}{\varrho_1^2 - h^2},$$

ist, dagegen $= \frac{2\pi}{h^2 - \varrho_1^2}$ für $\varrho_1 < h$.

Zu § 70. Vgl. die Anmerkung zu § 43.

Biographie.

Wenn wie in früheren Jahrhunderten so auch in dem unserigen die italienische Forschung auf dem Gebiete der Physik neben derjenigen anderer Nationen eine gleichberechtigte Stellung einnimmt, so ist das vor Allem das Verdienst von *Melloni* in Neapel, *Nobili* und *Amici* in Florenz, endlich von *Matteucci* und *Felici* in Pisa.

Riccardo Felici ist am 11. Juni 1819 in Parma geboren und besuchte die Schulen seiner Vaterstadt. Er studirte in Pisa, wo er am 12. Juli 1843 promovirte, sein Lehrer war *Matteucci*, der wie wenige geeignet war, den hochbegabten und strebsamen jungen Forscher zu fördern. *Matteucci* selbst war auf Empfehlungen *A. v. Humboldt*'s bei dem Grossherzog von Toscana *Leopold II.* nach manchen vorherigen Irrfahrten zum Professor in Pisa ernannt worden. Es war ein glücklicher Stern, der *Matteucci* wie *Felici* nach Toscana geführt hatte, wo von dem damaligen Grossherzog im Anschluss an die alten Traditionen der Medicäer künstlerische und wissenschaftliche Bestrebungen nach Möglichkeit unterstützt wurden und das Unterrichtswesen sich auf einer sehr hohen Stufe befand.

Im Jahre 1846 wurde *Felici* in Pisa Assistent von *Matteucci*. Seine wissenschaftlichen Arbeiten wurden durch den Krieg von 1848 unterbrochen, an dem er in dem Bataillon der Studirenden und Professoren von Pisa theilnahm. Mit ihnen zusammen focht er in dem so ruhmreichen Treffen von Curtatone.

In den Jahren 1849 und 1850 vertrat *Felici* seinen Lehrer in den Vorlesungen über Experimentalphysik. 1856 wurde er zum »Professore aggregato«, 1859 zum ordentlichen Professor und Director des physikalischen Laboratoriums ernannt, zweimal, 1870—71 und 1882—83, war er Rector der Universität Pisa.

Im Jahre 1893 endlich hat *Felici* hoch betagt seine Stellung aufgegeben und lebt in voller geistiger Frische theils in La Spezia, theils auf seinem Landgut in den Apenninen in

der Nähe der Bäder von Lucca, umgeben von der Liebe und Fürsorge seiner Tochter, seiner Enkelin und seiner Urenkelin.

Felici's Leistungen als Lehrer und Forscher sind von zahlreichen Akademien durch Ernennung zu ihrem Mitglied und von seinen Regenten durch Verleihung hoher Orden anerkannt worden.

Matteucci und sein Freund und Nachfolger *Felici* ergänzten sich in vieler Hinsicht. *Matteucci*'s reiches, rein wissenschaftliches Wirken wurde oft durch seine politische und administrative Thätigkeit unterbrochen, die freilich durch Förderung des Unterrichtswesens der Wissenschaft selbst zu Gute kam, dagegen hat *Felici*, soweit es irgend möglich war, sich von dem politischen Leben ferngehalten; so erklärt es sich auch, dass er trotz seiner Bedeutung nicht Mitglied des Senates war. Während *Matteucci* ferner mit besonderem Interesse die wissenschaftliche Bewegung in England und Frankreich verfolgte, besitzt *Felici*, obgleich er nur mühsam Deutsch liest, eine Vorliebe für die deutsche Forschung.

Wenigen Männern dürfte es wie *Felici* vergönnt gewesen sein, in ihrem Leben eine so reiche wissenschaftliche und politische Entwickelung vor sich abspielen zu sehen. Sein Heimathland ist politisch geeinigt und ebenso sind seine und seiner Vorgänger Hauptforschungsgebiete, zunächst die Reibungs- und Voltaelektricität, zu dem Gesammtgebiet der Elektricität verschmolzen und dann dieses mit der Optik auf das engste verknüpft worden.

Felici's eigene Forschungen haben wesentlich dazu beigetragen, die Grundlagen, auf denen sich diese Zusammenfassungen vollziehen sollten, zu sichern. Im Anschluss an *Faraday*'s Arbeiten über Induction hat er deren allgemeine Gesetze weiter erforscht und *Faraday*'s Ergebnisse in mancher Richtung theoretisch und experimentell erweitert und begründet. Drei der betreffenden Arbeiten sind im Obigen deutsch wiedergegeben.

Es wäre aber durchaus irrig, *Felici*'s Bedeutung nur nach seinen wissenschaftlichen Arbeiten zu beurtheilen.

Bis zur Gründung des neuen Laboratoriums in Rom besass in Italien nur die Universität in Pisa ein solches in unserem Sinne. So war es denn nur natürlich, dass die jungen italienischen Physiker dorthin kamen, um zu arbeiten. Sie konnten auch in keine bessere Schule eintreten; bei dem in mathematischer

wie experimenteller Hinsicht begabten, mit reicher Litteraturkenntniss ausgestatteten *Felici* mussten sie die moderne Art der wissenschaftlichen Arbeiten kennen lernen.

Felici hat weiter die von *Matteucci* begründete Zeitschrift »Il nuovo Cimento« nach dessen Tode herausgegeben. Mit rastlosem Eifer hat er allein trotz zahlreicher Schwierigkeiten ihr Weitererscheinen ermöglicht und sie mit der Zeit immer mehr zu einem Mittelpunkt der italienischen physikalischen Arbeiten gemacht, ein Verdienst, das bei der Zersplitterung der italienischen Veröffentlichungen nicht dankbar genug anerkannt werden kann.

Erst dadurch ist es auch dem Ausland möglich geworden, sich einen Ueberblick über die schnell emporstrebende italienische Physik zu verschaffen.

Anmerkungen des Herausgebers.

Allgemeines. Die drei Abhandlungen *Felici*'s »Ueber die mathematische Theorie der elektrodynamischen Induction« haben die Kenntnisse von der Induction wesentlich erweitert. Nach *Faraday*'s grosser Entdeckung hatten dieser selbst und andere in einer Reihe von Fällen die quantitativen Gesetze zunächst für die Magnetoinduction geprüft, bei der die inducirten Ströme viel stärker sind als bei der Voltainduction, obgleich diese eigentlich die leichter übersehbaren Verhältnisse darbietet.

Felici's grosses Verdienst ist es, als der erste (*Gaugain* folgte zwei Jahre später) die Gesetze der Voltainduction experimentell aufgestellt zu haben.

Der Titel der Abhandlungen *Felici*'s ist nicht ganz zutreffend. Denn *Felici* giebt nicht nur eine Theorie der elektrodynamischen Induction; ein grosser Theil der Arbeit ist der experimentellen Feststellung ihrer Gesetze gewidmet, und an diese anknüpfend wird dann in ähnlicher Weise wie von *Ampère* bei der Aufstellung seines Elementargesetzes ein Inductionsgesetz abgeleitet.

Die theoretischen Entwickelungen folgen demselben Gedankengang wie diejenigen *Ampère*'s zur Ableitung der Gesetze der elektrodynamischen Wirkungen.

Felici mass bei seinen Versuchen nicht die inducirten Stromstärken selbst, sondern ordnete die Versuche so an, dass von zwei inducirenden Stromkreisen, die verschieden gross oder gegen den inducirten Stromkreis verschieden gelagert waren, in diesem stets gleiche und entgegengesetzte Ströme inducirt wurden. Dadurch umging er die Schwierigkeit, die kurz dauernden inducirten Ströme genau zu messen.

Einen kurzen Auszug der Versuche und die Ableitung der Formel

$$E = k \frac{ds\, ds'}{r} \cos\theta \cos\theta'$$

hat *Felici* in den Annales de Chimie (3) 34 p. 64 1852 gegeben.

Sehr ausführlich besprochen sind *Felici*'s Resultate in *G. Wiedemann*, Die Lehre von der Elektricität, Bd. IV.

Bei den Ableitungen ist zu beachten, dass nicht immer streng zwischen inducirter elektromotorischer Kraft und Intensität des inducirten Stromes unterschieden ist. Fehler entstehen dadurch nicht.

In dem italienischen Text ist »forza« bald für elektromotorische Kraft, bald für Intensität benutzt; bei der Uebersetzung ist dies stets unterschieden.

Zu § 1 (S. 5). Die Angabe, dass *F. E. Neumann* nicht von den Versuchsergebnissen ausgehe, ist wohl nur theilweise richtig.

F. E. Neumann (Abhandlungen der Berliner Akademie 1845 p. 1 und 1847 p. 1) leitet aus dem *Lenz*'schen Satze, dass die Wirkung, welche der inducirende Strom oder Magnet auf den inducirten Leiter ausübt, wenn die Induction durch die Bewegung des letzteren hervorgebracht ist, immer einen hemmenden Einfluss auf diese Bewegung ausübt — in Verbindung mit dem Satze, dass die Stärke der momentanen Induction proportional der Geschwindigkeit dieser Bewegung ist, das allgemeine Gesetz der linearen Induction ab.

Der *Lenz*'sche Satz war aber aus Versuchen gewonnen worden, wenn auch *Felici* (vergl. S. 41) nicht ganz deren Beweiskraft anerkennen will.

G. Th. Fechner geht von den Sätzen aus: 1) Jede Wirkung eines Stromelementes lässt sich ansehen als zusammengesetzt aus der Wirkung eines positiven und eines gleich starken negativen Elektricitätstheilchens, die gleichzeitig dasselbe Raumelement in entgegengesetztem Sinne durchlaufen; 2) die Wirkung zweier Stromelemente lässt sich mit Rücksicht auf diese Zusammensetzung durch die Annahme darstellen, dass gleichartige Elektricitäten anziehend auf einander einwirken, wenn sie in gleichem Sinne oder nach einer gemeinsamen Winkelspitze hin gehen, entgegengesetzte Elektricitäten aber, wenn sie in entgegengesetztem Sinne gehen oder so, dass die eine sich der gemeinschaftlichen Winkelspitze nähert, während die andere sich davon entfernt.

W. Weber (Elektrodynamische Maassbestimmungen. Leipzig, Weidmann'sche Buchhandlung, 1846 S. 126—132; *Wilhelm*

Weber's gesammelte Werke Bd. I. S. 165) fügt den Annahmen von *Fechner* noch die Hypothese hinzu, dass die gegenseitige Wirkung zweier bewegter Elektricitätstheilchen von der relativen Geschwindigkeit und auch von der Beschleunigung ihrer Bewegung gegeneinander auf ihren Bahnen abhängen könne.

Zu § 1. Die genauen Citate der auf S. 5 § 1 erwähnten Abhandlungen sind:

Abria, Ann. de Chim. et de Phys. (3) 3 p. 59 1841 und 7 p. 486 1843. *Abria* beschäftigte sich besonders mit den Strömen höherer Ordnung.

J. Henry, Ann. de Chim. et de Phys. (3) 3 p. 394 1841; Pogg. Ann. Ergb. 1 p. 282 1839/42.

E. Lenz, Pogg. Ann. 34 p. 385 1835.

E. Lenz und *M. Jacobi*, Pogg. Ann. 47 p. 225 1839 und *E. Lenz*, Ebda. p. 266. Es handelt sich hierbei stets um Magnetinduction.

Zu § 1, S. 6, Zeile 11 von oben. Die reducirte Länge ist die Länge eines Normaldrahtes, dessen Längeneinheit als Widerstandseinheit gewählt wird.

Zu § 2, S. 7. Die Verwendung des Thermoelementes zur Prüfung der Empfindlichkeit dürfte wohl auf den Einfluss *Nobili*'s zurückzuführen sein.

Zu § 2, S. 7. Der Apparat für die Unterbrechungen und Schliessungen ist der Disjunctor, wie ihn z. B. *Dove*, Pogg. Ann. 43 p. 512 1838 beschrieben hat.

Zu § 5, S. 12, Zeile 11 von oben. Unter secundärer Wirkung dürfte eine Wirkung durch Selbstinduction zu verstehen sein.

Zu § 7, S. 15, Zeile 16—24. Die erwähnte Hypothese von *Nobili* ist kurz die folgende:

Nobili sieht eine Schwierigkeit darin, dass der einen Eisenstab umfliessende Strom zwei gerade entgegengesetzte Wirkungen hervorruft, einmal eine Magnetisirung, die Strömen entspricht, welche dem äusseren Strom gleichgerichtet sind, und dann Ströme erzeugt, die ihm entgegengesetzt verlaufen. Durch die Annahme, dass die ersten molecular, die letzten dagegen allgemein (generali) sind, scheint ihm die Schwierigkeit nicht gehoben. Er glaubt die eine Wirkung den materiellen Theilchen, die andere der Elektricität selbst zuschreiben zu sollen. »Warum, statt zu sagen, dass die Magnetisirung in elektrischen Strömen besteht, die um die Theilchen der magnetischen Metalle kreisen, schreibt man nicht diese Bewegung